

# فصل صفر

یادآوری از پایه نهم

## اتحادهای جبری و عبارتهای گویا

### اتحادهای جبری و کاربرد آنها

#### تعریف اتحاد

اگر یک تساوی جبری به گونه‌ای باشد که به ازای همه مقادیر برای متغیرهایش، تساوی برقرار باشد، آن تساوی را اتحاد می‌نامیم.

**نکته** تساوی‌های جبری ساده مانند  $a - a = b - b$  که به ازای همه مقادیر متغیرهای  $a$  و  $b$  صادق و برقرار هستند، اتحاد به حساب می‌آیند. البته اتحادهای ساده این چنینی ممکن است کاربردی در جبر برای ما نداشته باشند.

#### اتحادهای پرکاربرد در ریاضیات

در زیر تعدادی از اتحادهای معروف و پرکاربرد، شرح داده می‌شوند:

$$(1) \begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای

دقت کنید: اتحاد دوم همان اتحاد اول است که در آن به جای  $b$  عبارت  $-b$  را جای‌گذاری کرده‌ایم:

$$\text{یادتان باشد که: } (-b)^2 = (-b)(-b) = b^2$$

**نکته** سمت راست اتحاد مربع دو جمله‌ای را به زبان خودمانی این‌گونه حفظ کنید:

«اولی به توان دو + دو برابر اولی در دومی + دومی به توان دو»

$$(2) (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

اتحاد مزدوج

**نکته** سمت راست اتحاد مزدوج را به زبان خودمانی این‌گونه حفظ کنید:

«اولی به توان دو (یکی از جملات هم علامت به توان دو) منهای دومی به توان دو»

$$(3) (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

اتحاد جمله مشترک

**نکته** سمت راست اتحاد جمله مشترک را به زبان خودمانی این‌گونه حفظ کنید:

«جمله مشترک به توان دو + غیر مشترک‌ها با هم جمع و در مشترک ضرب + غیر مشترک‌ها در هم ضرب»

### مثال

تساوی‌های زیر را با استفاده از الگوی سه اتحاد گفته شده کامل کنید.

الف)  $(x+6)^2 = x^2 + \dots + \dots$

پاسخ: همان‌طور که می‌بینید این اتحاد از الگوی «اتحاد مربع دو جمله‌ای» پیروی می‌کند که جمله اول آن یک متغیر و جمله دوم آن یک عدد است. بنابراین طرف راست اتحاد را می‌نویسیم و به جای  $a$  متغیر  $x$  و به جای  $b$  عدد  $6$  را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$(x+6)^2 = x^2 + 2 \times (x)(+6) + (6)^2 = x^2 + 12x + 36$$

ب)  $(-3x+2)^2 = \dots + \dots + 4$

پاسخ: در این مثال هم مانند مثال قبل از الگوی اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم و دقت می‌کنیم که به جای  $a$  جمله جبری  $-3x$  و به جای  $b$  عدد  $2$  را جای‌گذاری کنیم.

$$(-3x+2)^2 = (-3x)^2 + 2 \times (-3x)(+2) + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4$$

پ)  $(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}y)^2 = \dots + \dots + \dots$

پاسخ: باید دقت کنیم که در سؤالات مربوط به مبحث اتحادها، به جای دو جمله اصلی  $a$  و  $b$ ، هر عبارت جبری‌ای می‌تواند قرار بگیرد و ممکن است عبارت کسری، رادیکالی یا اعشاری باشد. اما ما بدون توجه به نوع عبارت، هر یک از جملات اصلی را به جای  $a$

و  $b$  جای‌گذاری می‌کنیم و سپس نتیجه را ساده می‌کنیم.

$$(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}y)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})(-\frac{1}{\sqrt{2}}y) + (-\frac{1}{\sqrt{2}}y)^2$$

$$= 2 - 2(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}y) + \frac{1}{2}y^2 = 2 - 2y + \frac{1}{2}y^2$$



$$\text{ت) } (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = \dots - \dots$$

پاسخ: این سؤال از الگوی اتحاد مزدوج پیروی می‌کند که به جای  $a$  متغیر  $x$  و به جای  $b$  عدد  $\sqrt{3}$  نشسته است.

$$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = x^2 - (\sqrt{3})^2 = x^2 - 3$$

$$\text{ث) } (-\sqrt{5} + \dots)(\dots - \sqrt{5}) = 5 - 10 = -5$$

پاسخ: ظاهر این سؤال شبیه الگوی اتحاد مزدوج است. اما ابتدا باید کشف کنیم که جمله‌ای که در هر دو پرانتز، هم علامت است یا همان  $a$ ، کدام است و جمله غیر هم علامت یا همان  $b$  کدام است؟ برای این کار به جواب تساوی دقت می‌کنیم و سعی می‌کنیم با الگوی  $a^2 - b^2$  تطبیق دهیم. همان طور که مشخص است، جمله هم‌علامت در دو پرانتز  $-\sqrt{5}$  است و جمله غیر هم علامت هم عددی است که توان دوم آن برابر با  $10$  شده است یعنی  $\sqrt{10}$ . اما در پرانتز دوم باید منفی آن را قرار دهیم. پس داریم:

$$(-\sqrt{5} + \sqrt{10})(-\sqrt{10} - \sqrt{5}) = (-\sqrt{5})^2 - (\sqrt{10})^2 = 5 - 10 = -5$$

$$\text{ج) } (2x + 7)(2x - 3) = \dots + \dots +$$

پاسخ: این سؤال را با الگوی اتحاد جمله مشترک حل می‌کنیم و ابتدا مشخص می‌کنیم که جمله مشترک اینجا عبارت  $2x$  و جملات غیر مشترک به ترتیب اعداد  $+7$  و  $-3$  هستند. بنابراین طبق رابطه اتحاد، جای‌گذاری می‌کنیم.

$$(2x + 7)(2x - 3) = (2x)^2 + (+7 - 3)(2x) + (7)(-3) = 4x^2 + 8x - 21$$

$$\text{چ) } (-5x + \dots)(-5x - \dots) = 25x^2 + 15x - 28$$

پاسخ: اگر دقت کنیم می‌بینیم که این سؤال از الگوی اتحاد جمله مشترک پیروی می‌کند. اما در طرف چپ تساوی فقط جمله مشترک مشخص است و باید جملات غیر مشترک را به کمک طرف راست تساوی پیدا کنیم. طبق اتحاد جمله مشترک باید دنبال دو عدد بگردیم که حاصل جمع‌شان  $-3$  باشد. چرا  $-3$ ؟

چون باید ضرب آن در جمله مشترک یعنی  $-5x$  برابر  $15x$  شود:  $(-5x)(-3) = 15x$ .

همچنین حاصل ضرب آن دو عدد  $-28$  شود. با کمی آزمون و خطا می‌فهمیم که این دو عدد می‌توانند  $-7$  و  $+4$  باشند.

$$(-5x + 4)(-5x - 7) = 25x^2 + (-3)(-5x) + (4)(-7)$$

#### کاربرد اتحادها در محاسبات عددی



حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

$$\text{الف) } (998)^2 = (1000 - 2)^2 = \quad \text{ب) } 98 \times 102 = (100 - 2)(100 + 2) = \quad \text{پ) } 107 \times 98 = (100 + 7)(100 - 2) =$$

پاسخ: الف) در این سؤال سعی می‌کنیم دو عددی که در هم ضرب می‌شوند را به شکل یکی از اتحادها درآوریم.

$$(1000 - 2)^2 = (1000)^2 + 2(1000)(-2) + (-2)^2 = 1000000 - 4000 + 4 = 996000 + 4 = 996004$$

$$(100 - 2)(100 + 2) = (100)^2 - (2)^2 = 10000 - 4 = 9996 \quad \text{ب)}$$

$$(100 + 7)(100 - 2) = (100)^2 + (7 - 2)(100) + (7)(-2) = 10000 + 500 - 14 = 10500 - 14 = 10486 \quad \text{پ)}$$



عبارت گویا: به‌طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که بعد از ساده شدن، صورت و مخرج آن یک عبارت جبری (تک جمله‌ای یا چند جمله‌ای) باشد، به همراه این شرط که مخرج همواره باید مخالف صفر باشد.

مثال

مشخص کنید کدام یک از عبارت‌های جبری زیر یک عبارت گویا است و کدام یک عبارت گویا نیست؟

(ت)  $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$

(پ)  $\sqrt{9}$

(ب)  $\frac{x-x^2y}{x+y}$

(الف)  $\frac{x^2-4x+5}{x^4+x^3-1}$

(ج)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{\pi}}{z}$

(ع)  $\frac{x-y}{\sqrt[3]{x^3+y}}$

(ج)  $\frac{x^2-x+2}{z+\sqrt{\pi}}$

(ث)  $\sqrt[5]{x^5}$

(ذ)  $\frac{|x-y|}{x}$

(د)  $\frac{z(y+1)(\sqrt{x^2+1})}{(y+2)(\sqrt{x^2+1})}$

(خ)  $2x-7$

پاسخ: (الف) یک عبارت گویا است. زیرا هم صورت و هم مخرج هر کدام یک چند جمله‌ای‌اند.

(ب) یک عبارت گویا است. زیرا هم صورت و هم مخرج هر کدام یک چند جمله‌ای‌اند.

(پ) یک عبارت گویا است. زیرا می‌دانیم هر عدد ثابت به عنوان یک جمله‌ای محسوب می‌شود.

(ت) یک عبارت گویا نیست. زیرا مجهول زیر رادیکال با فرجهٔ زوج است و عبارت جبری که در آن مجهول زیر رادیکال وجود دارد را یک چند جمله‌ای گویا به حساب نمی‌آوریم.

(ث) یک عبارت گویا است. با اینکه در این عبارت جبری نیز یک رادیکال وجود دارد، چون مجهول زیر رادیکال با فرجهٔ فرد است، عبارت پس از ساده کردن به صورت  $\sqrt[5]{x^5} = x$  در می‌آید و بنابراین می‌توان آن را یک چند جمله‌ای گویا به حساب آورد.

(ج) یک عبارت گویا است. در این عبارت جبری هم رادیکال وجود دارد، اما عبارتی که زیر رادیکال است عدد پی ( $\pi$ ) است و جذر آن هم یک عدد حقیقی است و تمامی اعداد حقیقی را به عنوان یک تک جمله‌ای گویا در نظر می‌گیریم.

(چ) یک عبارت گویا است. در این مثال نیز رادیکال وجود دارد، اما با کمی دقت درمی‌یابیم که پس از ساده کردن  $\sqrt[3]{x^3}$  که با فرجهٔ فرد است عبارت به صورت  $\frac{x-y}{x+y}$  ساده خواهد شد و ملاحظه می‌شود که صورت و مخرج کسر هر کدام چند جمله‌ای هستند و کل کسر در مجموع یک عبارت گویا به شمار می‌رود.

(ح) یک عبارت گویا است.

(خ) یک عبارت گویا است.

(د) یک عبارت گویا است. در نگاه اول چون رادیکال با فرجهٔ زوج ملاحظه می‌شود شاید گفته شود که یک عبارت گویا نیست، ولی با کمی دقت ملاحظه می‌شود که می‌توان صورت و مخرج را با هم ساده نمود و عبارت پس از ساده شدن به صورت  $\frac{z(y+1)}{y+2}$  ظاهر خواهد شد که بیانگر یک عبارت گویاست.

(ذ) یک عبارت گویا نیست. می‌دانیم عبارت‌های مجهولی که داخل قدرمطلق باشند را نمی‌توان به عنوان عبارت گویا در نظر گرفت.

تعریف‌شده یا نشده بودن عبارات گویا

برای تعیین همهٔ مقادیری که به ازای آنها یک عبارت گویا تعریف می‌شود (می‌گوییم عبارت گویا با معنی است)، باید مقادیری از متغیر را حذف کنیم که به ازای آن مقادیر، مخرج کسر صفر می‌شود. یعنی مقدار یک عبارت گویا وقتی با معنی است که مخرج کسر صفر نباشد. «پس در حالتی که مخرج یک عبارت گویا صفر شود. آنگاه عبارت گویا تعریف نشده است و مقدار ندارد.»

**نکته** هنگامی یک کسر شامل عبارت‌های جبری، یک عبارت گویا است که مخرج آن کسر در محدودهٔ گفته شده، همواره مخالف صفر باشد. بنابراین در حل سؤالات می‌خواهیم محدوده‌ای را پیدا کنیم که مخرج کسر در آن محدوده هیچگاه صفر نشود. به همین خاطر مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و بازه‌هایی را که در آنها مخرج کسر برابر صفر و کسر تعریف نشده می‌شود پیدا می‌کنیم و در نتیجه در باقی محدوده‌ها و به ازای باقی اعداد، کسر ما یک عبارت گویای با معنی خواهد بود.



تعیین کنید عبارتهای زیر در چه نقاطی تعریف نشده‌اند.

الف)  $\frac{1}{x}$       ب)  $\frac{x}{x-1}$       پ)  $\frac{2x^2+1}{x+a}$       ت)  $\frac{3-2x}{(x-2)(2x+3)}$

ث)  $4x+6$       ج)  $\frac{x^2+5}{x^2-1}$       چ)  $\frac{5-3x}{x^2+4}$

پاسخ: الف) می‌دانیم برای یافتن محدوده گویا بودن کافی است مخرج کسر را مساوی صفر قرار دهیم یعنی  $x=0$ . بنابراین عبارت گویای  $\frac{1}{x}$  به ازای  $x=0$  تعریف نشده است.

ب) مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

بنابراین عبارت گویای  $\frac{x}{x-1}$  به ازای  $x=1$  تعریف نشده است.

پ) مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم:  
پس این عبارت گویا به ازای  $x=-a$  تعریف نشده است.

ت)  $(x-2)(2x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ 2x+3=0 \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x=-\frac{3}{2} \end{cases}$

بنابراین این عبارت گویا به ازای  $x=2$  و  $x=-\frac{3}{2}$  تعریف نشده خواهد بود.

ث) چون در مخرج این عبارت هیچ مجهولی ملاحظه نمی‌شود ( $\frac{4x+6}{1}$ )، لذا عبارت داده شده یک چند جمله‌ای است و می‌دانیم چند جمله‌ای‌ها در تمام نقاط و اعداد تعریف شده می‌باشند.

ج) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج

بنابراین این عبارت گویا به ازای  $x=1$  و  $x=-1$  تعریف نشده است.

$$\Rightarrow (x-1)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

چ) معادله جواب ندارد؛ زیرا هیچ عددی نداریم به جای  $x$  قرار دهیم و پس از به توان رسیدن، حاصلش منفی شود. یعنی برای  $x$  هیچ جوابی پیدا نخواهیم نمود. لذا این عبارت گویا در تمام نقاط و اعداد، تعریف شده خواهد بود.

پس این عبارت گویا به ازای  $x=-a$  تعریف نشده است.



ساده‌کردن عبارتهای گویا

برای ساده کردن هر عبارت گویا، می‌توان صورت و مخرج آن عبارت را بر عبارتی غیرصفر تقسیم کرد یعنی:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b} \quad (k \neq 0, b \neq 0)$$

در واقع صورت و مخرج طرف سمت چپ را بر  $k$  تقسیم کرده‌ایم و به طرف دوم رسیده‌ایم:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{\frac{k}{k}a}{\frac{k}{k}b} = \frac{a}{b} \quad (k \neq 0, b \neq 0)$$

برای ساده کردن یک عبارت گویا، ابتدا باید صورت و مخرج آن را تا حد امکان تجزیه کنیم، سپس عوامل مشترک را از صورت و مخرج کسر ساده کنیم، یعنی صورت و مخرج را بر عامل‌های مشترک تقسیم کنیم. به این وسیله عبارت گویا ساده می‌شود. البته باید توجه داشت عوامل مشترکی که از صورت و مخرج کسر حذف می‌کنیم، باید مخالف صفر باشند.

عبارتهای زیر را ساده کنید.

الف)  $\frac{ax+ay}{xy+y^2}$       ب)  $\frac{x^2-16}{4-x}$       پ)  $\frac{x^2-5x+6}{4x-12}$

ت)  $\frac{5x^2-13x-6}{x^2-9}$       ث)  $\frac{6x^2+x-1}{9x^2+9x-4}$

پاسخ: الف)  $\frac{ax+ay}{xy+y^2} \xrightarrow[\text{از صورت و مخرج}]{\text{بافاکتورگیری}} \frac{a(x+y)}{y(x+y)} = \frac{a}{y}$

ب) برای آن که عبارت مخرج همانند یکی از عبارتهای  $\frac{x^2-16}{4-x}$  صورت باشد باید در مخرج از منفی فاکتور بگیریم

$$\frac{x^2-16}{4-x} \xrightarrow[\text{کمک اتحاد مزدوج}]{\text{تجزیه صورت به}} \frac{(x-4)(x+4)}{4-x} = \frac{(x-4)(x+4)}{-(x-4)} = -(x+4)$$

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{4x - 12} \xrightarrow{\text{تجزیه صورت به کمک اتحاد جمله مشترک و تجزیه مخرج به کمک فاکتورگیری}} \frac{(x-3)(x-2)}{4(x-3)} = \frac{x-2}{4} \quad (\text{پ})$$

$$\frac{5x^2 - 13x - 6}{x^2 - 9} \xrightarrow{\text{تجزیه صورت به کمک روش A و تجزیه مخرج به کمک اتحاد مزدوج}} \frac{(x-3)(5x+2)}{(x+3)(x-3)} = \frac{5x+2}{x+3} \quad (\text{ت})$$

### نکته (توضیح روش A)

در تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک، هرگاه ضریب جمله  $x^2$  برابر عدد یک نباشد (مانند همین مثال که ۵ است)، آنگاه می‌توانیم برای تجزیه، از روش A استفاده نمائیم، بدین صورت که ابتدا نام چند جمله‌ای را A می‌نامیم، سپس تمام جملات عبارت نام‌گذاری شده را در ضریب  $x^2$  (در این جا یعنی ۵) ضرب می‌کنیم و حاصل آنها را به دست می‌آوریم.

$$5x^2 - 13x - 6 = A \xrightarrow{\text{ضرب تمام جملات در ۵}} 25x^2 - 13(5x) - 30 = 5A$$

ضریب عبارت واسطه را تغییر نمی‌دهیم و عدد را فقط در متغیر یعنی X ضرب می‌کنیم. بعد از ضرب کردن، همانند تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک عمل می‌کنیم.

در آخر باید تا حد امکان از پرانتزها فاکتور بگیریم تا جملاتی را که در ضریب  $x^2$  ضرب نموده بودیم بتوانیم با ضریب A ساده نمائیم.

$$25x^2 \begin{matrix} \boxed{-13} \\ \downarrow \\ \text{جمع دو عدد} \end{matrix} (5x) \begin{matrix} \boxed{-30} \\ \downarrow \\ \text{ضرب دو عدد} \end{matrix} = 5A \xrightarrow{\text{تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک}} (5x-15)(5x+2) = 5A$$

$$\Rightarrow (x-3)(5x+2) = A \Rightarrow (x-3)(5x+2) = A$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 13x - 6 = (x-3)(5x+2)$$

$$\frac{6x^2 + x - 1}{9x^2 + 9x - 4} \xrightarrow{\text{تجزیه صورت و مخرج به روش A}} \frac{(3x-1)(2x+1)}{(3x+4)(3x-1)} = \frac{2x+1}{3x+4} \quad (\text{ث})$$

$$6x^2 + x - 1 = A \xrightarrow{\times 6} 36x^2 \begin{matrix} \boxed{+1} \\ \downarrow \\ \text{جمع دو عدد} \end{matrix} (6x) \begin{matrix} \boxed{-6} \\ \downarrow \\ \text{ضرب دو عدد} \end{matrix} = 6A$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک}} (6x+3)(6x-2) = 6A$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری از پرانتزها}} \cancel{3}(2x+1) \times \cancel{3}(3x-1) = \cancel{3}A \Rightarrow (2x+1)(3x-1) = A$$

$$9x^2 + 9x - 4 = A \xrightarrow{\times 9} 81x^2 \begin{matrix} \boxed{+9} \\ \downarrow \\ \text{جمع دو عدد} \end{matrix} (9x) \begin{matrix} \boxed{-36} \\ \downarrow \\ \text{ضرب دو عدد} \end{matrix} = 9A$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک}} (9x+12)(9x-3) = 9A$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری از پرانتزها}} \cancel{3}(3x+4) \times \cancel{3}(3x-1) = \cancel{3}A \Rightarrow (3x+4)(3x-1) = A$$

### جمع و تفریق کردن عبارت‌های گویا

برای به دست آوردن حاصل جمع یا تفاضل عبارت‌های گویا ابتدا باید عبارت‌های جبری هم مخرج باشند. برای این کار در صورت امکان پس از ساده کردن هر کسر، ابتدا مخرج‌ها را تجزیه می‌نمائیم، سپس «حاصل ضرب عبارت‌های مشترک با توان‌های بزرگ‌تر در عبارت‌های غیر مشترک» را به دست می‌آوریم که به آن کوچک‌ترین مضرب مشترک می‌گوییم. یعنی (ک.م.م).

$$\frac{A}{(B)(D)} + \frac{C}{(D)(E)} = \frac{AE}{(B)(D)(E)} + \frac{CB}{(B)(D)(E)} = \frac{AE+CB}{B \times D \times E}$$

□ عامل‌های غیرمشترک □

ک م م

ک م م

در عبارت بالا D عامل مشترک و B و C عامل‌های غیر مشترک هستند.

پس  $B \times D \times E$  (ک.م.م) مخرج‌ها است.



حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $\frac{1}{x^2yz} + \frac{1}{xy^2z} + \frac{1}{xyz^2}$     ب)  $\frac{3x}{x^2-16} - \frac{2}{x-4}$     پ)  $\frac{1}{x} + \frac{3x}{x+1} - \frac{1}{x(x+1)}$     ت)  $\frac{30x}{9x^2-1} + \frac{4}{3x-1} - \frac{5}{3x+1}$

پاسخ: الف)

$$\frac{1}{x^2yz} + \frac{1}{xy^2z} + \frac{1}{xyz^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{مخرج کسر اول} &= x^2yz \\ \text{مخرج کسر دوم} &= xy^2z \\ \text{مخرج کسر سوم} &= xyz^2 \end{aligned} \right\} \text{عوامل مشترک } (x, y, z) \text{ با بزرگ‌ترین توان } \times \text{ عوامل های غیر مشترک } = \text{ک.م.م.}$$

در این مثال عامل غیر مشترک نداریم.  $\Rightarrow$  م.م.ک.  $= x^2y^2z^2$

$$\frac{1}{x^2yz} + \frac{1}{xy^2z} + \frac{1}{xyz^2} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک می‌گیریم}} = \frac{1(yz)}{x^2y^2z^2} + \frac{1(xz)}{x^2y^2z^2} + \frac{1(xy)}{x^2y^2z^2} = \frac{yz + xz + xy}{x^2y^2z^2}$$

ب)  $\frac{3x}{x^2-16} - \frac{2}{x-4}$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{تجزیه به کمک اتحاد مزدوج} &\rightarrow (x-4)(x+4) \\ \text{مخرج اول} &= x^2-16 \\ \text{مخرج دوم} &= x-4 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \text{عوامل های مشترک با بزرگ‌ترین توان} &: x-4 \\ \text{عوامل های غیر مشترک} &: x+4 \end{aligned} \right. \Rightarrow \text{م.م.ک.} = (x-4)(x+4)$$

$$\frac{3x}{x^2-16} - \frac{2}{x-4} \xrightarrow{\text{هم‌مخرج کردن}} = \frac{3x}{(x-4)(x+4)} - \frac{2}{x-4} = \frac{3x}{(x-4)(x+4)} - \frac{2(x+4)}{(x-4)(x+4)}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک می‌گیریم}} = \frac{3x-2x-8}{(x-4)(x+4)} = \frac{x-8}{(x-4)(x+4)}$$

پ)  $\frac{1}{x} + \frac{3x}{x+1} - \frac{1}{x(x+1)}$

$$\left. \begin{aligned} \text{مخرج کسر اول} &= x \\ \text{مخرج کسر دوم} &= x+1 \\ \text{مخرج کسر سوم} &= x(x+1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{عوامل های مشترک} &: 1 \\ \text{عوامل های غیر مشترک} &: x, x+1 \end{aligned} \Rightarrow \text{م.م.ک.} = x(x+1)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{3x}{x+1} - \frac{1}{x(x+1)} \xrightarrow{\text{هم‌مخرج کردن}} = \frac{1(x+1)}{x(x+1)} + \frac{3x(x)}{x(x+1)} - \frac{1}{x(x+1)}$$

$$= \frac{x+1+3x^2-1}{x(x+1)} = \frac{3x^2+x}{x(x+1)} \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} = \frac{x(3x+1)}{x(x+1)} = \frac{3x+1}{x+1}$$

ت)  $\frac{30x}{9x^2-1} + \frac{4}{3x-1} - \frac{5}{3x+1}$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{تجزیه مخرج کسر اول} &= (3x-1)(3x+1) \\ \text{تجزیه مخرج کسر دوم} &= 3x-1 \\ \text{تجزیه مخرج کسر سوم} &= 3x+1 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \text{عوامل های مشترک} &: 1 \\ \text{عوامل های غیر مشترک} &: (3x-1), (3x+1) \end{aligned} \right. \Rightarrow \text{م.م.ک.} = (3x-1)(3x+1)$$

$$\frac{30x}{9x^2-1} + \frac{4}{3x-1} - \frac{5}{3x+1} \xrightarrow{\text{هم‌مخرج کردن}} = \frac{30x}{(3x-1)(3x+1)} + \frac{4}{3x-1} - \frac{5}{3x+1}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک می‌گیریم}} = \frac{30x}{(3x-1)(3x+1)} + \frac{4(3x+1)}{(3x-1)(3x+1)} - \frac{5(3x-1)}{(3x-1)(3x+1)}$$

$$\frac{30x+12x+4-15x+5}{(3x-1)(3x+1)} = \frac{27x+9}{(3x-1)(3x+1)} \xrightarrow{\text{تجزیه صورت به کمک فاکتورگیری}} = \frac{9(3x+1)}{(3x-1)(3x+1)} = \frac{9}{3x-1}$$