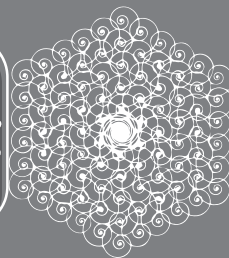




فصل ۲

قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن



$\pi = 3,14$

ریزشیم (سؤال‌های خطبه‌خط)

24364



درس اول: نسبت و تناسب در هندسه

۹۲. مفاهیم زیر را تعریف کنید.

الف) نسبت: (ب) تناسب: (پ) واسطه (میانگین) هندسی:

۹۳. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

الف) مطابق ویژگی «طرفین وسطین کردن» اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، $(b, d \neq 0)$ ، آنگاه

ب) اگر $\frac{a}{b} = \frac{13}{5}$ ، آنگاه $\frac{a}{a-b} = \dots\dots\dots$

پ) اگر دو پاره‌خط به طول‌های ۱۶ و ۴ واحد داشته باشیم، پاره‌خطی که واحد طول دارد، واسطه هندسی بین آن‌هاست.

ت) اگر میانگین هندسی دو عدد برابر ۶ باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است.

ث) در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت اندازه‌های نظیر وارد بر آن‌ها برابر است.

ج) اگر اندازه ارتفاع‌های دو مثلث با هم برابر باشند، آنگاه نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازه نظیر این ارتفاع‌هاست.

چ) اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعده مقابل به این رأس آن‌ها، روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازه های آن‌هاست.

ح) اگر دو مثلث، قاعده مشترک داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعده آن‌ها، روی یک خط موازی با این قاعده باشند، این مثلث‌ها با هم برابر است.

۹۴. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مطابق ویژگی «ترکیب نسبت در صورت»، اگر $\frac{x}{y} = \frac{17}{12}$ ، آنگاه $\frac{x-y}{y} = \frac{5}{12}$.

ب) نسبت اندازه‌های دو پاره‌خط در هندسه، به شرطی تعریف می‌شود که هر دو با یک واحد اندازه‌گیری تعریف شده باشند. درست ☐ نادرست ☐

پ) مثلث ABC، با طول ارتفاع‌های $AH = 3$ و $BH' = 5$ و طول اضلاع $BC = 10$ و $AC = 8$ قابل رسم است. درست ☐ نادرست ☐

ت) اگر میانه وارد بر یکی از اضلاع مثلثی را رسم کنیم، آن مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم کرده‌ایم. درست ☐ نادرست ☐

۹۵. جدول زیر را کامل کنید. (مخرج تمام نسبت‌ها، مخالف صفر است.)

۱	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow$ (الف)	$\frac{3}{8} = \frac{6}{16} \Leftrightarrow$ (ب)	طرفین وسطین کردن
۲	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	$\frac{12}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$	معکوس کردن طرفین تناسب
۳	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ یا (پ)	$\frac{3}{13} = \frac{6}{26} \Rightarrow$ (ت)	تعویض جای طرفین یا وسطین
۴	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c}{c+d}$ یا (ج) یا (ث)	$\frac{1}{7} = \frac{2}{14} \Rightarrow$ (ج)	(ح) نسبت در صورت یا مخرج
۵	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c}{c-d}$ یا (د) یا (خ)	$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} \Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{6}{21}$	(ذ)
۶	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (ر)	(ز)	
۷	$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ (ز)		تعمیم ویژگی ۶
	$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20} \Rightarrow$ (س)		

۹۶. اگر $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{5}{6}$ ، حاصل $x + y + z$ را به دست آورید.

۹۷. با استفاده از ویژگی‌های تناسب، نشان دهید: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

۹۸. اگر $\frac{a}{b} = \frac{4}{7}$ ، حاصل $\frac{3b-7}{3a-4}$ را به کمک ویژگی‌های تناسب به دست بیاورید.

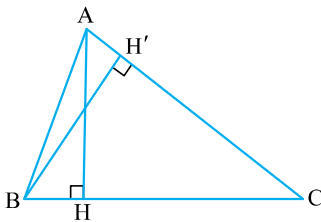
۹۹. زاویه‌های خارجی مثلثی، با اعداد ۳، ۴ و ۵ متناسب‌اند. اندازه کوچک‌ترین زاویه داخلی مثلث چقدر است؟

۱۰۰. اگر $\frac{3m+n}{-2n-4m} = \frac{1}{4}$ ، حاصل $\frac{m}{n}$ را به دست آورید.

۱۰۱. طول پاره‌خطی را به دست بیاورید که واسطه هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۶ و ۸ سانتی‌متر است.

۱۰۲. ثابت کنید در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت اندازه‌های دو ارتفاع وارد بر آن‌ها برابر است.

۱۰۳. در مثلث ABC، دو ارتفاع AH = ۳ و BH' = ۳/۶ رسم شده‌اند. اگر طول ضلع BC برابر ۶ باشد، طول ضلع AC را به دست آورید؟



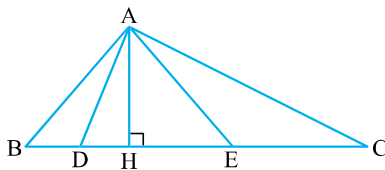
۱۰۴. ثابت کنید هرگاه اندازه ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازه قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد شده است.

۱۰۵. ثابت کنید اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعده مقابل به این رأس در دو مثلث روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازه قاعده‌های آن‌هاست.

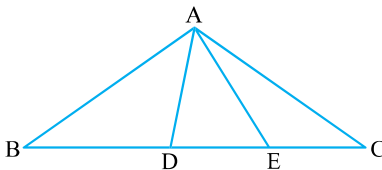
۱۰۶. با توجه به شکل مقابل، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) ارتفاع متناظر با رأس A در مثلث‌های ADE، ABD و ADC کدام پاره‌خط است؟

ب) حاصل نسبت‌های $\frac{S_{ADE}}{S_{ADC}}$ و $\frac{S_{ABD}}{S_{ADE}}$ را بیابید.

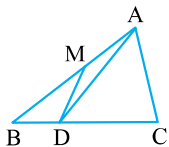


۱۰۷. در شکل زیر، نسبت مساحت مثلث ABD به مساحت مثلث ADE برابر ۳/۴ و نسبت مساحت مثلث ADE به مساحت مثلث ABC برابر ۲/۳ است. نسبت‌های $\frac{DE}{EC}$ و $\frac{BD}{BC}$ را به دست آورید.



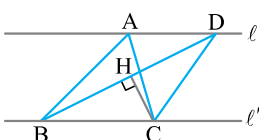
۱۰۸. نشان دهید میانه رسم شده در هر مثلث، آن را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند.

۱۰۹. در شکل زیر، $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$ و $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{3}$ است. اگر مساحت مثلث AMD برابر ۲ باشد، مساحت مثلث ABC را محاسبه کنید.



۱۱۰. ثابت کنید اگر دو مثلث، قاعده مشترک داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعده آن‌ها، روی یک خط موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند.

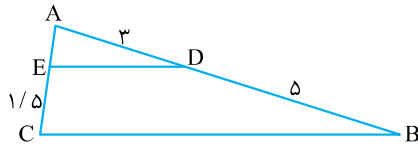
۱۱۱. در شکل زیر، دو خط ℓ و ℓ' موازی و مساحت مثلث ABC، ۶ واحد مربع است. اگر $BD = ۸$ ، فاصله نقطه C از BD را بیابید.



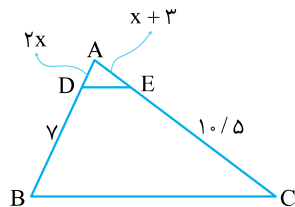
درس دوم: قضیه تالس

۱۱۲. قضیه تالس را بیان و اثبات کنید.

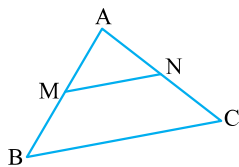
۱۱۳. در شکل زیر، $BC \parallel DE$ ، $AD = 3$ ، $BD = 5$ و $EC = 1/5$. به کمک قضیه تالس، طول AC را بیابید.



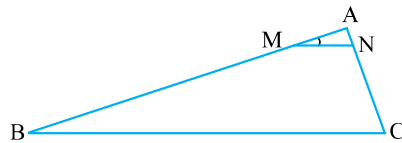
۱۱۴. در شکل مقابل، $ED \parallel BC$ ، مقدار x را به دست آورید.



۱۱۵. در شکل زیر $MN \parallel BC$ است. ابتدا تناسب قضیه تالس را بنویسید؛ سپس به کمک ویژگی‌های تناسب، روابط: الف) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ، ب) $\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$ و پ) $\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$ را نتیجه بگیرید.

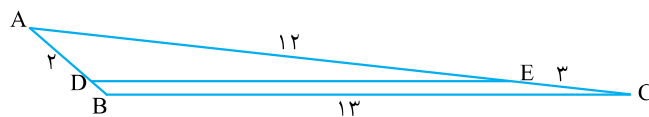


۱۱۶. در شکل زیر، دو زاویه AMN و ABC با هم برابرند. اگر $AM = 3$ ، $AB = 6x + 6$ ، $AN = 1$ و $NC = x + 3$ ، اندازه پاره خط AC را به دست آورید.

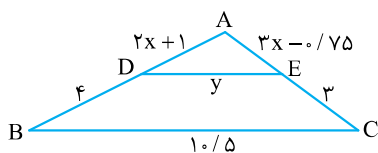


۱۱۷. نشان دهید اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازه ضلع‌های آن با اندازه ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند (تعمیم قضیه تالس).

۱۱۸. در شکل زیر، $DE \parallel BC$ ، طول اضلاع DE و AB را محاسبه کنید.

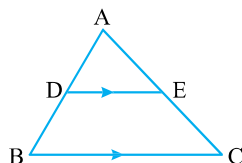


۱۱۹. در شکل روبه‌رو، اگر $DE \parallel BC$ ، مقادیر x و y را بیابید.



۱۲۰. در شکل زیر، پاره خط DE موازی با BC رسم شده است. درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را مشخص کنید.

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------|
| ☐ نادرست | ☐ درست |
| ☐ نادرست | ☐ درست |
| ☐ نادرست | ☐ درست |
| ☐ نادرست | ☐ درست |
| ☐ نادرست | ☐ درست |
| ☐ نادرست | ☐ درست |
| ☐ نادرست | ☐ درست |



الف) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{DE}{BC}$

ب) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

پ) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

ت) $\frac{AD}{DB} = \frac{DE}{BC}$

ث) $\frac{BD}{AD} = \frac{EC}{AE}$

ج) $\frac{BD}{AB} = \frac{EC}{AC} = \frac{DE}{BC}$

ج) $AD \times AB = AE \times AC$



بارم

۱۸۳

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

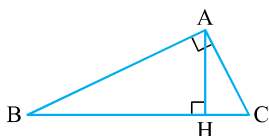
- الف) به برابری دو نسبت، می‌گوییم.
 ب) اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازه ضلع‌های آن با اندازه ضلع‌های مثلث اصلی است.
 پ) هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث، هستند.
 ت) هر دو n ضلعی ، همواره با هم متشابه هستند.

۱

۱۸۴

درستی و نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

- الف) در مثلث قائم‌الزاویه شکل زیر، رابطه $AH = \frac{AB \times AC}{BC}$ برقرار است.
☐ درست ☐ نادرست

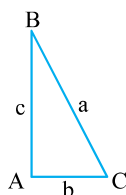


- ب) اگر دو مثلث ABC و A'B'C' به طور جداگانه با مثلث MNP متشابه باشند، آنگاه دو مثلث ABC و A'B'C' نیز با هم متشابه‌اند.

☐ درست ☐ نادرست☐ درست ☐ نادرست

- پ) نسبت محیط‌ها و مساحت‌های دو پنج‌ضلعی منتظم، همواره با هم برابر است.

- ت) اگر بین طول اضلاع مثلث زیر، رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار باشد، به‌طور قطع، نمی‌توان $A = 90^\circ$ را نتیجه‌گیری کرد.

☐ درست ☐ نادرستآزمون
شبیه‌ساز ۲

۱۸۵

واسطه هندسی دو عدد مثبت a و b دو برابر b است. حاصل $\frac{b}{a}$ را بیابید.

۰/۷۵

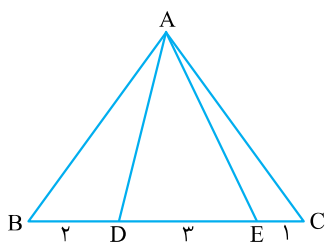
۱۸۶

اگر $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ ، حاصل $\frac{3a-b}{-2a+3b}$ را محاسبه کنید.

۰/۷۵

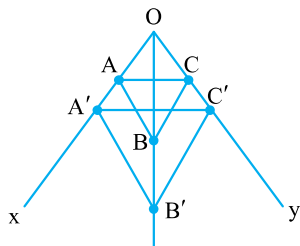
۱۸۷

در شکل مقابل، $BD = 2$ ، $DE = 3$ و $EC = 1$ است. اگر مساحت مثلث ADC برابر ۶ واحد مربع باشد، مساحت مثلث‌های ABD و ABC را بیابید.



۱

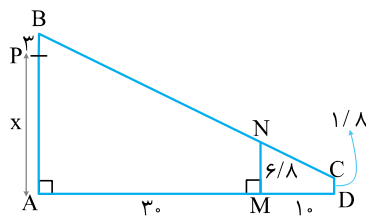
۱۸۸

با توجه به شکل زیر، $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$. ثابت کنید: $AC \parallel A'C'$.

۱

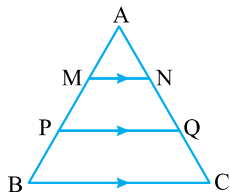
۱۸۹ در شکل زیر، مقدار x کدام است؟

۲/۷۵



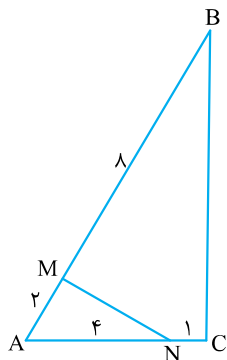
۱۹۰ در شکل زیر، $MN \parallel PQ \parallel BC$ و $AM = 2MP = 2BP$. اگر $MN = 2$ ، طول پاره‌خط‌های PQ و BC را بیابید.

۱/۷۵



۱۹۱ با توجه به طول‌های داده‌شده در شکل زیر، نسبت مساحت چهارضلعی $NMBC$ به مساحت مثلث AMN چقدر است؟

۱/۵



۱۹۲ عکس قضیه فیثاغورس را ثابت کنید.

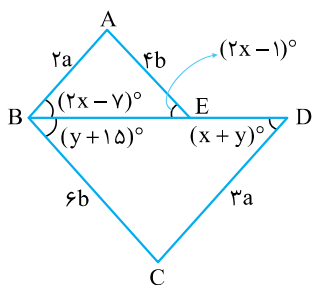
۲/۷۵

۱۹۳ در مثلث ABC ، میانه‌های BN و CM را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه P قطع کنند. نسبت مساحت مثلث MNP به مساحت مثلث BCP چقدر است؟

۱/۷۵

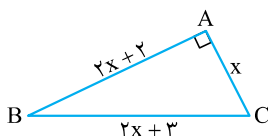
۱۹۴ در شکل زیر می‌دانیم $BE = 2DE$ ، مقادیر x و y چقدر است؟

۲



۱۹۵ اندازه اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای به صورت زیر است؛ طول ارتفاع وارد بر وتر در این مثلث را بیابید.

۲



۲۰ جمع نمره

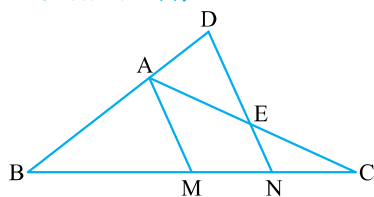
«شاد و تندرست باشید.»

چند گرفتیم؟



(برگرفته از کنکور ریاضی ۹۴)

۱۹۶. در مثلث ABC ، $AB = \frac{2}{3}AC$ و پاره خط ND موازی میانه AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ را به دست آورید. (۱)

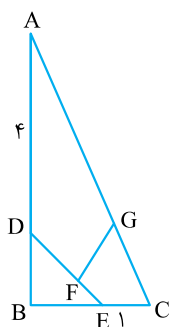


۱۹۷. رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع دیگر قرار دارد، به‌طوری که اضلاع آن بر یکدیگر عمودند. نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به مساحت مثلث کوچک‌تر را محاسبه کنید؟ (۱۷۷۵)

(برگرفته از کنکور ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۰)

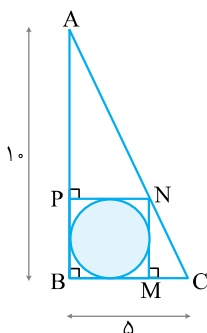
(برگرفته از کنکور ریاضی دی ۱۴۰۱)

۱۹۸. در شکل زیر، اگر $\frac{AC}{CG} = \frac{DE}{EF} = 4$ باشد، اندازه FG را به دست آورید. (۲)



۱۹۹. اگر اندازه اضلاع قائمه مثلث ABC ، Δ و 10 واحد و چهارضلعی $PNMB$ مربع باشد، مساحت ناحیه رنگی چقدر است؟ (۱۷۲۵)

(برگرفته از کنکور ریاضی دی ۱۴۰۱)

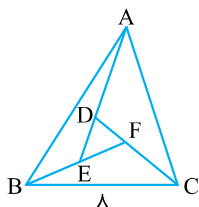


۲۰۰. طول ضلع یک لوزی، واسطه هندسی دو قطر آن لوزی است. اندازه زاویه کوچک‌تر در هر مثلث حاصل از قطرهای این لوزی چند درجه است؟ (۱۷۰۵)

(برگرفته از کنکور ریاضی ۱۴۰۲)

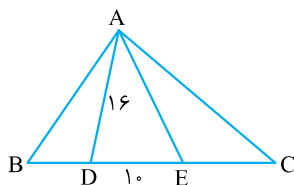
(برگرفته از کنکور ریاضی ۱۴۰۲)

۲۰۱. در شکل زیر $\widehat{ABF} = \widehat{CAE} = \widehat{BCD}$ ، $DF = \frac{2}{5}$ و $EF = 3$ است. طول AB را به دست آورید. (۱۷۰۵)

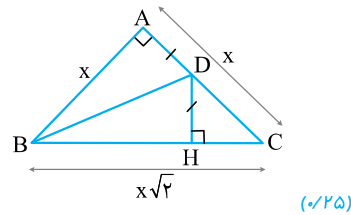


(برگرفته از کنکور ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۲)

۲۰۲. در شکل زیر $\widehat{BAD} = \widehat{EAC}$ و $BA = BE$ است. طول EC را به دست آورید. (۱۷۰۵)



۸۹. ابتدا با توجه به رابطه فیثاغورس در مثلث ABC، اندازه ضلع BC را به دست می‌آوریم: ($AB = AC = x$)



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \\ \Rightarrow BC = \sqrt{2x^2} \xrightarrow{x>0} BC = \sqrt{2}x \quad (0/25)$$

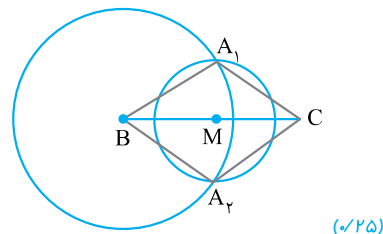
حال با توجه به اینکه نقطه D روی نیمساز زاویه B قرار دارد؛ پس از دو ضلع زاویه B یعنی از دو ضلع AB و BC به یک فاصله است؛ بنابراین $AD = DH$. (0/25)

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BDC}} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times x}{\frac{1}{2} \times DH \times x \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (0/25)$$

می‌توانیم نتیجه بگیریم که مثلث ABD از مثلث BDC کوچک‌تر است (0/25) و خواسته سؤال $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABD}}$ است؛ بنابراین:

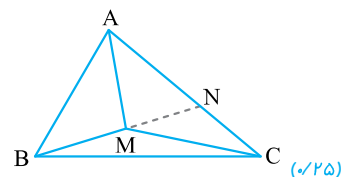
$$\frac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle ABD}} = \sqrt{2} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{S_{\triangle BDC} + S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{1} \\ \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABD}} = \sqrt{2} + 1 \quad (0/25)$$

۹۰.



۱. پاره خط BC را به طول ۸ واحد رسم می‌کنیم. (0/25)
۲. از نقطه B دایره‌ای به شعاع ۵ واحد رسم می‌کنیم. (0/25)
۳. از نقطه M، وسط ضلع BC، دایره‌ای به شعاع $AM = 3$ رسم می‌کنیم. (0/25)
۴. محل تلاقی دو دایره همان نقطه A است. (0/25)

۹۱. با توجه به قضیه نابرابری مثلثی در مثلث‌های BMC و AMB، AMC داریم:



$$\begin{cases} AM + MC > AC \\ AM + MB > AB \quad (0/25) \xrightarrow{+} \\ BM + MC > BC \end{cases} \\ 2(AM + BM + CM) > AB + AC + BC \Rightarrow \text{محیط} > 12 \quad (I) \quad (0/25)$$

از طرفی در دو مثلث ABN و CMN داریم:

$$\begin{cases} AB + AN > BN = BM + MN \\ CN + MN > MC \end{cases} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow AB + \underbrace{AN + CN}_{AC} + \underbrace{MN}_{MC} > BM + \underbrace{MN}_{MC} + MC$$

$$\Rightarrow AB + AC > BM + MC \quad (0/25)$$

در نتیجه به‌طور مشابه داریم:

$$AB + BC > AM + MC \quad (0/25), \quad AC + BC > AM + BM \quad (0/25)$$

حال با جمع کردن سه رابطه به‌دست آمده داریم:

$$2(AB + AC + BC) > 2(AM + BM + CM) \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \text{محیط} > AM + BM + CM \Rightarrow \text{محیط} > 6 \quad (II) \quad (0/25)$$

در آخر از دو محدوده به‌دست آمده (I) و (II) اشتراک می‌گیریم:

$$(I) \cap (II) \Rightarrow \text{محیط} > 6 < 12 \quad (0/25)$$

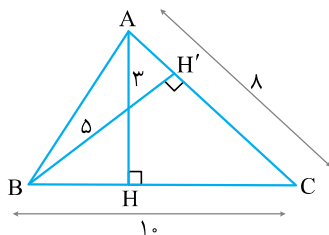
۹۲. الف: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، $\frac{a}{b}$ را نسبت عدد a به عدد b می‌نامند. (b ≠ 0) ب: اگر حاصل دو یا چند نسبت، باهم برابر باشند، یک تناسب را تشکیل می‌دهند. مثلاً اگر AB پاره‌خطی به طول ۳ cm و CD پاره‌خطی به طول ۵ cm باشد، $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$. حال فرض کنید $A'B' = 6$ cm و $C'D' = 10$ cm باشد، در این صورت $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ؛ بنابراین یک تناسب به‌صورت $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ تشکیل می‌شود. ب: اگر طرفین یا وسطین یک تناسب، شامل دو عدد برابر باشد، یعنی $\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$ یا $\frac{b}{a} = \frac{b}{c}$ ، با طرفین وسطین کردن تناسب، نتیجه می‌شود: $b^2 = ac$. در این صورت b را واسطه (میانگین) هندسی a و c می‌نامیم.

۹۳. الف: $ad = bc$ ب: $\frac{13}{8}$ ب: اگر a، میانگین هندسی دو عدد ۱۶ و ۴ باشد، داریم:

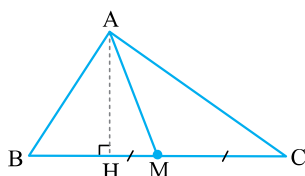
$$a^2 = 16 \times 4 \Rightarrow a = \sqrt{64} = 8$$

ت: ۳۶؛ میانگین هندسی دو عدد a و b برابر ۶ است؛ پس: $ab = 36 \Rightarrow a = 6$ ؛ ث: دو ارتفاع ج: قاعده‌های ج: قاعده ج: مساحت

۹۴. الف: نادرست؛ طبق ویژگی «تفضیل نسبت در صورت» نتیجه گفته‌شده حاصل نمی‌شود. ب: درست؛ نسبت طول دو ارتفاع وارد بر دو ضلع یک مثلث، با عکس نسبت طول اضلاع نظیر آنها برابر است؛ با توجه به شکل زیر $\frac{AC}{BC} \neq \frac{AH}{BH}$ زیرا $\frac{8}{10} \neq \frac{3}{5}$.



ت: درست؛ هر دو مثلث ABM و AMC ارتفاع مشترک AH دارند، پس نسبت مساحت‌های این دو مثلث، با نسبت قاعده‌های نظیر ارتفاع AH برابر است؛ یعنی: $\frac{S_{ABM}}{S_{AMC}} = \frac{MB}{MC} = 1$

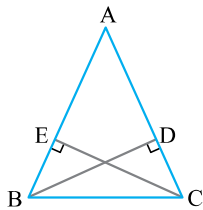


پاسخنامه
تشریحی

فینال

۱۰۱. اگر واسطه هندسی ۶ و ۸ را m در نظر بگیریم، داریم:
 $m^2 = 6 \times 8 \Rightarrow m = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

۱۰۲. مساحت مثلث ABC را یک بار با در نظر گرفتن ارتفاع BD و قاعده AC و بار دیگر با ارتفاع CE و قاعده AB محاسبه می‌کنیم و با هم برابر قرار می‌دهیم:



$$\left. \begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} \times BD \times AC \\ S_{ABC} &= \frac{1}{2} \times CE \times AB \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \times BD \times AC = \frac{1}{2} \times CE \times AB$$

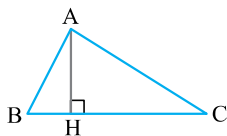
$$\Rightarrow BD \times AC = CE \times AB$$

با استفاده از عکس ویژگی طرفین وسطین کردن، تناسب زیر حاصل می‌شود:
 $\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BD}$

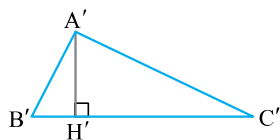
۱۰۳. در هر مثلث، نسبت اندازه اضلاع، با عکس نسبت اندازه ارتفاع‌های نظیر آن اضلاع برابر است. پس:
 $\frac{BC}{AC} = \frac{BH'}{AH} \Rightarrow \frac{6}{AC} = \frac{3/6}{3}$

با استفاده از ویژگی طرفین وسطین داریم:
 $3 \times 6 = 3/6 \times AC \Rightarrow AC = \frac{18}{3/6} = 5$

۱۰۴. در شکل زیر، اندازه ارتفاع‌های AH و $A'H'$ به ترتیب در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ برابر است. مساحت مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ را به دست می‌آوریم:



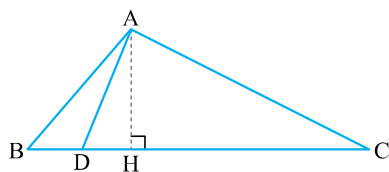
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times AH \times BC, S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \times A'H' \times B'C'$$



نسبت مساحت این دو مثلث برابر است با:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} \times AH \times BC}{\frac{1}{2} \times A'H' \times B'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

۱۰۵. فرض کنید دو مثلث ABD و ADC در رأس A مشترک‌اند و قاعده مقابل به این رأس (یعنی پاره‌خط‌های BD و DC) روی یک خط راست قرار دارند؛ از طرفی ارتفاع وارد بر پاره‌خط‌های BD و DC به ترتیب در مثلث‌های ABD و ADC برابر پاره‌خط AH است؛ نسبت مساحت‌های این دو مثلث برابر است با:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2} \times BD \times AH}{\frac{1}{2} \times DC \times AH} = \frac{BD}{DC}$$

۹۵. الف: $ad = bc$ ب: $3 \times 16 = 8 \times 6$ پ: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ت: $\frac{3}{6} = \frac{13}{26}$

ث: $\frac{c+d}{d}$ ج: $\frac{a}{a+b}$ چ: $\frac{1}{8} = \frac{2}{16}$ یا $\frac{16}{14} = \frac{16}{14}$ ح: ترکیب خ: $\frac{c-d}{d}$

د: $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ ذ: تفصیل نسبت در صورت یا مخرج ر: $a+c$

ز: $\frac{12}{16} = \frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ (این پاسخ می‌تواند متفاوت باشد). ژ: $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{b_1+b_2+\dots+b_n}$

س: $\frac{1+2+3+4}{5+10+15+20} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

۹۶. با استفاده از تعمیم ویژگی ۶ داریم:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{2} = \frac{x+y+z}{3+5+2} = \frac{x+y+z}{10}$$

از طرفی کسر بالا برابر $\frac{5}{6}$ است؛ پس:

$$\frac{x+y+z}{10} = \frac{5}{6} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 6(x+y+z) = 5 \times 10$$

$$\Rightarrow x+y+z = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$$

۹۷. صورت و مخرج سمت راست تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را در -1 ضرب می‌کنیم؛ داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{-c}{-d} \xrightarrow{\text{تعمیم ویژگی ۶}} \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

۹۸.

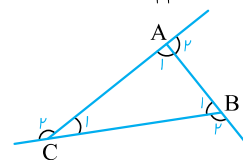
$$\frac{a}{b} = \frac{4}{7} \xrightarrow{\text{معکوس کردن طرفین وسطین}} \frac{b}{a} = \frac{7}{4}$$

حال صورت و مخرج سمت چپ تناسب بالا را در 3 و صورت و مخرج سمت راست آن را در -1 ضرب می‌کنیم و داریم:

$$\frac{3b}{3a} = \frac{-7}{-4} \xrightarrow{\text{تعمیم ویژگی ۶}} \frac{3b-7}{3a-4} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$$

۹۹. **روش اول:** زاویه‌های خارجی مثلث ABC ، با اعداد 3 ، 4 و 5 متناسب‌اند، در نتیجه تناسب زیر برقرار است:

$$\frac{\hat{A}_2}{3} = \frac{\hat{B}_2}{4} = \frac{\hat{C}_2}{5} \xrightarrow{\text{تعمیم ویژگی ۶}} \frac{\hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2}{12} = \frac{\hat{A}_2}{3} = \frac{\hat{B}_2}{4} = \frac{\hat{C}_2}{5}$$



می‌دانیم در هر مثلث، مجموع زوایای خارجی برابر 360° است، بنابراین:
 $\hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 360^\circ$ داریم:

$$\frac{360^\circ}{12} = \frac{360^\circ}{3} = \frac{\hat{A}_2}{3} = \frac{\hat{B}_2}{4} = \frac{\hat{C}_2}{5} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_2 = 90^\circ \\ \hat{B}_2 = 120^\circ \\ \hat{C}_2 = 150^\circ \end{cases}$$

اندازه زاویه‌های داخلی مثلث ABC به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= 180^\circ - \hat{A}_2 = 90^\circ \\ \hat{B}_1 &= 180^\circ - \hat{B}_2 = 60^\circ \\ \hat{C}_1 &= 180^\circ - \hat{C}_2 = 30^\circ \end{aligned}$$

اندازه کوچک‌ترین زاویه داخلی 30° است.

روش دوم: زاویه‌های خارجی این مثلث را به صورت $\hat{A}_2 = 3x$ ، $\hat{B}_2 = 4x$ و $\hat{C}_2 = 5x$ فرض می‌کنیم؛ داریم:

$$\hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 360^\circ \Rightarrow 3x + 4x + 5x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 12x = 360^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_2 = 90^\circ, \hat{B}_2 = 120^\circ, \hat{C}_2 = 150^\circ$$

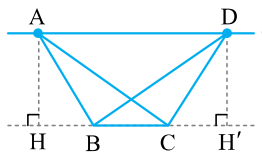
باقی راه‌حل، مانند روش اول است.

۱۰۰. با استفاده از طرفین وسطین کردن داریم:

$$2(3m+n) = 1(-2n-4m) \Rightarrow 6m+2n = -2n-4m$$

$$\Rightarrow 10m = -4n \xrightarrow{\text{عکس ویژگی طرفین وسطین کردن}} \frac{m}{n} = \frac{-4}{10} = \frac{-2}{5}$$

۱۱۰. یادآوری: در تمامی نقاط، فاصله دو خط موازی از یکدیگر با هم برابر است. در شکل زیر، دو مثلث ABC و BDC دارای قاعده مشترک BC هستند و خط d که دو رأس A و D روی آن قرار دارند با BC موازی است، پس اندازه ارتفاع‌های وارد بر قاعده BC از دو رأس A و D، با هم برابر است. نسبت مساحت این مثلث‌ها برابر است با:



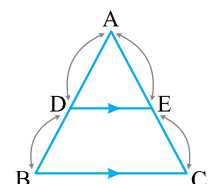
$$\frac{S_{ABC}}{S_{DBC}} = \frac{\frac{1}{2} \times AH \times BC}{\frac{1}{2} \times DH' \times BC} = 1$$

۱۱۱. دو مثلث ABC و BDC قاعده مشترکی دارند و رأس‌های A و D (که مقابل قاعده مشترک BC هستند)، روی یک خط موازی BC قرار دارند. پس مساحت مثلث‌های ABC و BDC با هم برابر است.

$$S_{ABC} = S_{DBC} \Rightarrow \frac{1}{2} \times CH \times BD = \frac{1}{2} \times CH' \times \frac{4}{3} \Rightarrow CH = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow CH = \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$$

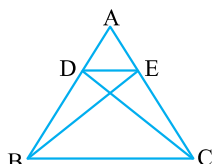
۱۱۲. قضیه تالس: هرگاه در یک مثلث خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آن‌ها تشکیل یک تناسب می‌دهند، یعنی:



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

اثبات: در شکل زیر، خط DE موازی ضلع BC رسم شده است. از رئوس B و C به ترتیب به نقاط E و D دو پاره‌خط رسم می‌کنیم.

مثلث‌های EAD و EDB در رأس E مشترک‌اند و اضلاع مقابل به این رأس، در یک راستا قرار دارند. در نتیجه:



$$\frac{S_{EAD}}{S_{EDB}} = \frac{AD}{DB}$$

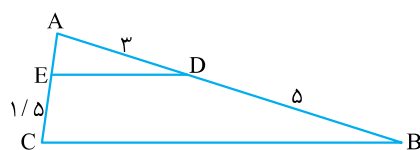
به همین ترتیب، برای دو مثلث EAD و EDC داریم:

$$\frac{S_{EAD}}{S_{EDC}} = \frac{AE}{EC}$$

از طرفی مثلث‌های EDC و EDB دارای قاعده مشترک DE هستند و رأس‌های روبه‌رو به این قاعده، یعنی نقاط B و C روی یک خط موازی این قاعده قرار دارند. پس هم‌مساحت‌اند؛ لذا از تناسب‌های بالا داریم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

۱۱۳. طبق قضیه تالس داریم:



$$ED \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{AE}{1/5} = \frac{3}{5}$$

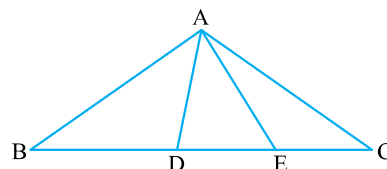
$$\Rightarrow AE = \frac{3 \times 1/5}{5} = 0/9$$

طول ضلع AC برابر $0/9 + 1/5 = 2/4$ است.

۱۰۶. الف: ارتفاع همه این مثلث‌ها، پاره‌خط AH است. ب: با توجه به اینکه ارتفاع همه مثلث‌ها با هم برابر است، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها، با نسبت قاعده‌هایی که ارتفاع AH بر آن‌ها وارد می‌شود، برابر است؛ در نتیجه:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ADC}} = \frac{DE}{DC}, \frac{S_{ABD}}{S_{ADE}} = \frac{BD}{DE}$$

۱۰۷. ارتفاع مثلث‌های ABD، ADE، ABC از رأس A یکسان است؛ پس نسبت مساحت‌های آن‌ها، برابر نسبت قاعده‌های مقابل به رأس A است؛ در نتیجه:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADE}} = \frac{BD}{DE} = \frac{3}{2} \Rightarrow BD = 3x, DE = 2x$$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{2x}{BC} = \frac{2}{7} \Rightarrow BC = 7x$$

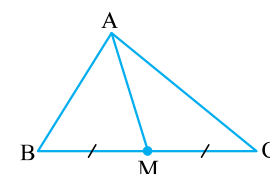
از طرفی $BC = BD + DE + EC$ ؛ در نتیجه:

$$7x = 3x + 2x + EC \Rightarrow EC = 2x$$

حاصل نسبت‌های خواسته شده برابر است با:

$$\frac{DE}{EC} = \frac{2x}{2x} = 1, \frac{BD}{BC} = \frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}$$

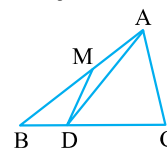
۱۰۸. در مثلث ABC، از رأس A میانه AM را بر ضلع BC رسم می‌کنیم. دو مثلث ABM و ACM در رأس A مشترک‌اند و ضلع‌های روبه‌رو به این رأس، روی یک امتدادند. پس دو مثلث در رأس A، هم‌ارتفاع‌اند؛ بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع است، داریم:



$$\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{BM}{MC} \quad \text{با توجه به } BM=MC$$

۱۰۹. بنا به فرض، $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{3}$ و $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$ ، از طرفی دو مثلث ADM و MDB:

در رأس D و مثلث‌های ABD و ADC در رأس A، مشترک‌اند؛ پس می‌توان نوشت:



$$\frac{S_{ADM}}{S_{MDB}} = \frac{AM}{MB} = \frac{2}{3} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب نسبت}} \frac{S_{ADM}}{S_{MDB} + S_{ADM}} = \frac{2}{3+2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ADM}}{S_{ADB}} = \frac{2}{5} (*)$$

از طرفی داریم:

$$\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{3} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب نسبت}} \frac{S_{ADB}}{S_{ADC} + S_{ADB}} = \frac{1}{3+1}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ADB}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4} (**)$$

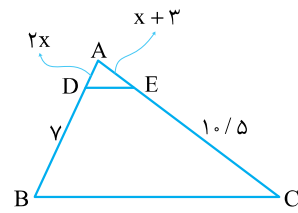
از تناسب‌های (*) و (**) نتیجه می‌شود:

$$\frac{S_{ADM}}{S_{ADB}} \times \frac{S_{ADB}}{S_{ABC}} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{10}$$

$$\xrightarrow[\text{کردن}]{\text{طرفین و سطین}} \frac{S_{ADM}=2}{S_{ABC}} = \frac{2}{10} \Rightarrow S_{ABC} = 10$$

پاسخنامه
تشریحی

۱۱۴. طبق قضیه تالس داریم:



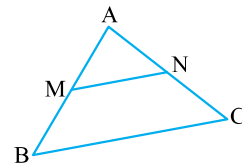
$$ED \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{2x}{y} = \frac{x+3}{10/5}$$

از طرفین وسطین داریم:

$$2x \times 10/5 = (x+3) \times y \Rightarrow 21x = 7x + 21$$

$$\Rightarrow 14x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{14} = \frac{3}{2} = 1.5$$

۱۱۵. به کمک قضیه تالس داریم:



$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

الف: با استفاده از ویژگی ترکیب نسبت در مخرج، می توان نوشت:

$$\frac{AM}{AM+MB} = \frac{AN}{AN+NC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

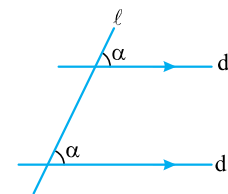
ب: کافی است طرفین تناسب به دست آمده از قضیه تالس را معکوس کنیم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$$

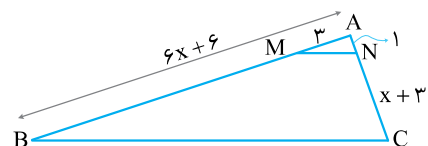
پ: برای تناسب حاصل در قسمت «ب» ویژگی ترکیب نسبت در مخرج را به کار می بریم:

$$\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN} \Rightarrow \frac{MB}{MB+AM} = \frac{NC}{NC+AN} \Rightarrow \frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$$

۱۱۶. یادآوری: اگر دو خط d و d' با خط سوم ℓ ، زاویه یکسانی در یک سمت خط ℓ و هم جهت با هم بسازند، داریم $d \parallel d'$. (عکس قضیه خطوط موازی و مورب)



بنابراین طبق فرض و یادآوری گفته شده، خطوط MN و BC موازی اند. به کمک نتایج به دست آمده از قضیه تالس داریم:



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{3}{6x+6} = \frac{1}{1+x+3}$$

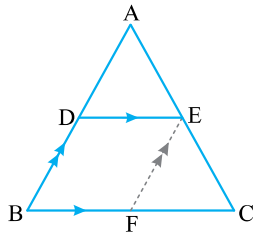
$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3(x+4) = 1(6x+6) \Rightarrow 3x+12 = 6x+6$$

$$\Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

اندازه پاره خط AC برابر $x+4=6$ است.

۱۱۷. فرض: $DE \parallel BC$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad \text{حکم}$$



از نقطه E ، پاره خط EF را موازی AB رسم می کنیم.

یادآوری: اگر در یک چهارضلعی، اضلاع مقابل به هم، دوجه دو با هم موازی باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است و برعکس.

در نتیجه چهارضلعی $DEFB$ ، متوازی الاضلاع است؛ لذا: $DE = BF$ و $DB = EF$. نتایج قضیه تالس را در مثل ABC یک بار با در نظر گرفتن $DE \parallel BC$ و بار دیگر با در نظر گرفتن $EF \parallel AB$ می نویسیم:

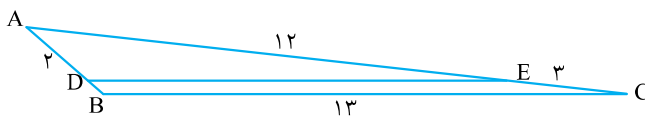
$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (I)$$

$$EF \parallel AB \Rightarrow \frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AC} \xrightarrow{BF=DE} \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \quad (II)$$

طرف راست تناسب های (I) و (II) با هم برابر است؛ در نتیجه:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

۱۱۸. از تعمیم قضیه تالس در مثل ABC داریم:



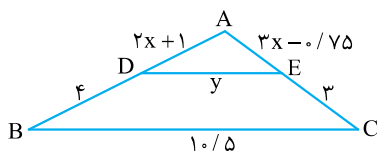
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{2}{AB} = \frac{12}{12+3} = \frac{DE}{13} \quad (I)$$

تساوی های (I) و (II) را جداگانه حل می کنیم:

$$(I): \frac{2}{AB} = \frac{12}{15} \Rightarrow AB = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$(II): \frac{12}{15} = \frac{DE}{13} \Rightarrow DE = \frac{4 \times 13}{5} = \frac{52}{5} = 10.4$$

۱۱۹. با توجه به قضیه تالس و تعمیم آن، داریم:



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{2x+1}{4} = \frac{3x-0.75}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 6x+3 = 12x-3 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{2x+1}{2x+5} = \frac{y}{10/5} \xrightarrow{x=1} \frac{3}{7} = \frac{y}{10/5}$$

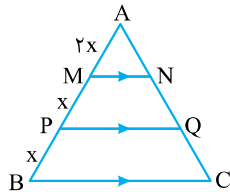
$$\Rightarrow y = \frac{3 \times 10/5}{7} = \frac{3 \times (3 \times 3/5)}{7} = 4/5$$

خطوط CD ، NM و AB بر پاره خط AD عمودند، پس با هم موازی اند (۰/۲۵)؛
طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث CQB داریم:

$$\frac{CF}{CQ} = \frac{FN}{BQ} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{۲}{۱۰+۳۰} = \frac{۱}{x+۱/۲} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow ۴۰ = ۲x + ۲/۲ \xrightarrow{\div ۲} ۲۰ = x + ۱/۱ \Rightarrow x = ۱۸/۹ \quad (۰/۲۵)$$

۱۹۰. طبق فرض مسئله، $AM = ۲MP = ۲BP$ ، در نتیجه فرض می‌کنیم:
 $AM = ۲x$ ، $MP = x$ ، $BP = x$ (۰/۲۵)



با دو بار به کارگیری تعمیم قضیه تالس در مثلث‌های APQ و ABC داریم:

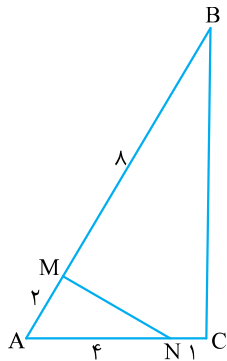
$$\Delta APQ : MN \parallel PQ \Rightarrow \frac{AM}{AP} = \frac{MN}{PQ} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \frac{۲x}{۳x} = \frac{۲}{PQ} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow PQ = ۳ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Delta ABC : MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \frac{۲x}{۴x} = \frac{۲}{BC} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow BC = ۴ \quad (۰/۲۵)$$

۱۹۱. مثلث‌های ABC و AMN متشابه‌اند؛ زیرا:



$$\begin{cases} \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{۲}{۵} \quad (۰/۲۵) \\ \hat{A} = \hat{A} \text{ (مشترک)} \end{cases}$$

تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین $\Delta AMN \sim \Delta ACB$ (۰/۲۵)

$$\text{نسبت تشابه} = k = \frac{AM}{AC} = \frac{۲}{۵} \quad (۰/۲۵)$$

نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، مربع تشابه آن‌هاست؛ در نتیجه:

$$\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = k^2 = \frac{۴}{۲۵} \quad (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{تفصیل نسبت}} \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AMN}} = \frac{۴}{۲۵ - ۲۴} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{NMBC}} = \frac{۴}{۲۱} \Rightarrow \frac{S_{NMBC}}{S_{\Delta AMN}} = \frac{۲۱}{۴} \quad (۰/۲۵)$$

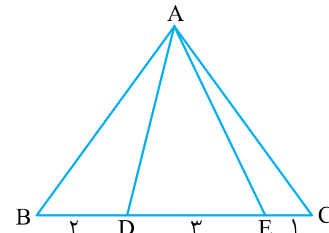
۱۸۶. با توجه به فرض می‌توان نوشت:
بنابراین:

$$\frac{۳a-b}{-۲a+۳b} = \frac{۳(\frac{۳}{۴}b)-b}{-۲(\frac{۳}{۴}b)+۳b} \quad (۰/۲۵) = \frac{\frac{۹}{۴}b-b}{-\frac{۳}{۲}b+۳b}$$

صورت و مخرج کسر حاصل را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۹b-۴b}{-۶b+۱۲b} = \frac{۵b}{۶b} = \frac{۵}{۶} \quad (۰/۲۵)$$

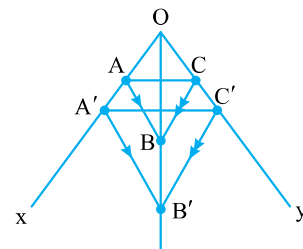
۱۸۷. مثلث‌های ABD ، ADC و ABC همگی در رأس A مشترک‌اند و قاعده‌های روبه‌رو به این رأس در تمامی این مثلث‌ها، روی یک خط راست قرار دارند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت طول قاعده‌های آن‌هاست.



$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{BD}{DC} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABD}}{۶} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow S_{\Delta ABD} = ۶ \times \frac{۱}{۲} = ۳ \quad (۰/۲۵)$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{BC}{DC} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{۶} = \frac{۶}{۳} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{۲۱}{۲} \quad (۰/۲۵)$$

۱۸۸.



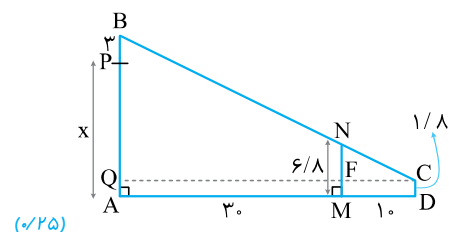
$$\Delta OA'B' : AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Delta OB'C' : BC \parallel B'C' \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{OC}{CC'} = \frac{OB}{BB'} \quad (۰/۲۵)$$

از مقایسه دو تناسب بالا، نتیجه می‌شود:

$$\frac{OA}{AA'} = \frac{OC}{CC'} \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} AC \parallel A'C' \quad (۰/۲۵)$$

۱۸۹. از رأس C ، خطی موازی پاره خط AD رسم می‌کنیم تا پاره خط‌های MN و AB را به ترتیب در نقاط F و Q قطع کند. (۰/۲۵)



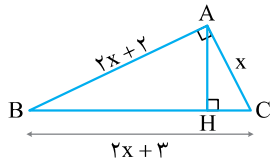
چهارضلعی‌های $MFCD$ و $AQFM$ مستطیل‌اند، در نتیجه:

$$QA = FM = ۱/۸ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} FN = MN - FM = ۶/۸ - ۱/۸ = ۵/۸ \quad (۰/۲۵) \\ BQ = AB - AQ = (x+۳) - ۱/۸ = x + ۱/۲ \quad (۰/۲۵) \end{cases}$$

$$AM = QF = ۳۰ \quad (۰/۲۵), \quad CF = MD = ۱۰ \quad (۰/۲۵)$$

۱۹۵. به کمک قضیه فیثاغورس داریم:



$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \quad (0/25) \Rightarrow (2x+3)^2 = x^2 + (2x+2)^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 12x + 9 = x^2 + 4x^2 + 8x + 4 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) = 0 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-1 \text{ غ.ق.} \end{cases} \quad (0/25)$$

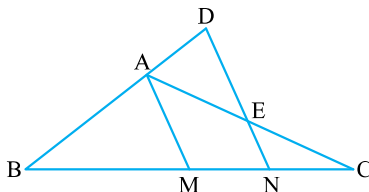
با استفاده از رابطه طولی زیر، طول AH (ارتفاع وارد بر وتر) را می‌یابیم:

$$AH \times BC = AB \times AC \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow AH \times (2x+3) = (2x+2)(x) \xrightarrow{x=5} AH \times (13) = 12 \times 5 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow AH = \frac{12 \times 5}{13} = \frac{60}{13} \quad (0/25)$$

۱۹۶. با توجه به قضیه تالس در مثلث BDN داریم:



$$AM \parallel DN \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{MN}{BM} \quad (I) \quad (0/25)$$

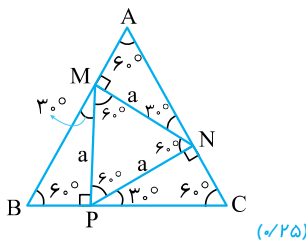
از طرفی با توجه به تعمیم قضیه تالس در مثلث AMC داریم:

$$AM \parallel EN \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{MC} \quad (II) \quad (0/25)$$

با توجه به فرض سؤال می‌دانیم که AM میانه وارد بر ضلع BC است؛ پس BM = MC. در نتیجه سمت راست رابطه‌های (I) و (II) با هم برابر هستند؛ پس داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (0/25) \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \quad (0/25)$$

۱۹۷. طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع داخلی را برابر a در نظر می‌گیریم. حال در مثلث NPC طول ضلع PC را با توجه به اینکه PN ضلع مقابل به زاویه ۶۰° است، برحسب a به دست می‌آوریم:



$$NP = \frac{\sqrt{3}}{2} PC \xrightarrow{NP=a} PC = \frac{2\sqrt{3}}{3} a \quad (0/25)$$

به همین ترتیب ضلع NC نیز روبه‌رو، زاویه ۳۰° است؛ پس:

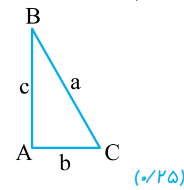
$$NC = \frac{1}{2} PC = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a \quad (0/25)$$

از طرفی با توجه به هم‌نهشتی سه مثلث گوشه‌ای درمی‌یابیم که BP = $\frac{\sqrt{3}}{3} a$ (۰/۲۵) و در نتیجه:

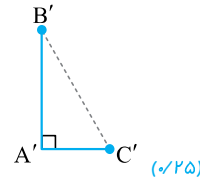
$$BC = BP + PC = \frac{\sqrt{3}}{3} a + \frac{2\sqrt{3}}{3} a = \sqrt{3} a \quad (0/25)$$

حال با توجه به اینکه می‌دانیم دو مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و MNP متشابه‌اند و نسبت تشابه برابر $k = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$ است (۰/۲۵)؛ پس نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر با ۳ است. (۰/۲۵)

۱۹۲. فرض $a^2 = b^2 + c^2$ حکم $\hat{A} = 90^\circ$.



فرض می‌کنیم رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ بین طول اضلاع مثلث ABC برقرار است. (۰/۲۵) پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را عمود بر هم و به‌ترتیب هم‌اندازه AB و AC در نظر می‌گیریم (۰/۲۵). سپس نقاط B' و C' را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث قائم‌الزاویه $A'B'C'$ تشکیل شود. (۰/۲۵)



با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ داریم:

$$(B'C')^2 = (A'B')^2 + (A'C')^2 \quad (0/25)$$

$$\xrightarrow{\frac{A'B'=AB}{A'C'=AC}} (B'C')^2 = AB^2 + AC^2 = c^2 + b^2 \quad (0/25)$$

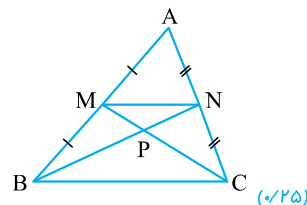
$$\xrightarrow{\text{فرض}} \xrightarrow{a^2=b^2+c^2} (B'C')^2 = a^2 \Rightarrow B'C' = a = BC \quad (0/25)$$

مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ هم‌نهشت‌اند؛ زیرا:

$$\left. \begin{matrix} A'B' = AB \\ A'C' = AC \\ B'C' = BC \end{matrix} \right\} \xrightarrow[\text{سه ضلع}]{\text{تساوی}} \Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \quad (0/25)$$

۱۹۳. با توجه به توضیحات داده‌شده، شکل زیر را رسم می‌کنیم. BN و CM به ترتیب میانه‌های رئوس B و C هستند، در نتیجه AM = MB (۰/۲۵) و AN = NC (۰/۲۵): طبق عکس قضیه تالس داریم:



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC \xrightarrow[\text{قضیه تالس}]{\text{تعمیم}} \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2} \quad (0/25)$$

$$\xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیه اساسی}} MNP \sim BPC \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \text{نسبت تشابه} = k = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2} \quad (0/25)$$

نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، مربع (مجذور) نسبت تشابه آن‌هاست:

$$\frac{S_{MNP}}{S_{BPC}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad (0/25)$$

۱۹۴. طبق فرض داریم:

$$\frac{BE}{DE} = 2 \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب نسبت}} \frac{BE}{BE+DE} = \frac{2}{2+1} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{BD} = \frac{2}{3} \quad (0/25)$$

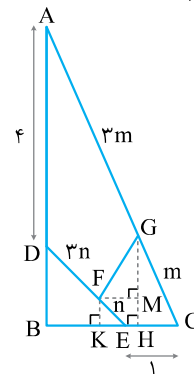
در نتیجه:

$$\left. \begin{matrix} \frac{BE}{BD} = \frac{2}{3} \\ \frac{AB}{CD} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3} \\ \frac{AE}{BC} = \frac{2b}{6b} = \frac{2}{3} \end{matrix} \right\} \xrightarrow[\text{تناسب سه ضلع}]{(0/25)} \Delta ABE \sim \Delta BDC \quad (0/25)$$

بنابراین زاویه‌های روبه‌رو به اضلاع متناظر، با هم برابرند:

$$\begin{cases} 2x - y = x + y \quad (0/25) \Rightarrow x - y = y \\ 2x - 1 = y + 1 \quad (0/25) \Rightarrow 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 9 \quad (0/25), y = 2 \quad (0/25)$$

۱۹۸. از نقاط F و G به ترتیب عمودهایی را بر ضلع BC رسم می‌کنیم. با توجه به فرض سؤال داریم:



حال طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث‌های BAC و BDE داریم:

$$\triangle BDE : FK \parallel DB \Rightarrow \frac{EK}{EB} = \frac{EF}{ED} = \frac{FK}{DB} \Rightarrow \begin{cases} EK = \frac{1}{4} EB \\ FK = \frac{1}{4} DB \end{cases} \quad (0/25)$$

اگر عمود FM را بر GH رسم کنیم، داریم:

$$GM = GH - MH = GH - FK = \frac{1}{4} AB - \frac{1}{4} DB = \frac{1}{4} (AB - DB) = \frac{1}{4} \quad (0/25)$$

$$FM = KH = BH - BK = (BC - \frac{1}{4} BC) - (BE - \frac{1}{4} BE) = \frac{3}{4} BC - \frac{3}{4} BE = \frac{3}{4} (BC - BE) = \frac{3}{4} \quad (0/25)$$

حال با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث FGM، اندازه FG را به دست می‌آوریم:

$$FG^2 = FM^2 + GM^2 \quad (0/25) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow FG = \frac{5}{4} = 1/25 \quad (0/25)$$

۱۹۹. ناحیه رنگی یک دایره است. طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC داریم:

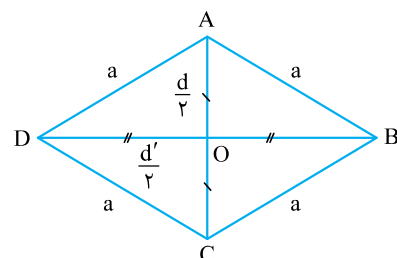
$$PN \parallel BC \Rightarrow \frac{PN}{BC} = \frac{AP}{AB} \quad (0/25) \Rightarrow \frac{PN}{5} = \frac{AP}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{PN}{AP} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad (0/25) \Rightarrow \frac{PN}{AB - PB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BM}{10 - BM} = \frac{1}{2} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow 2BM = 10 - BM \Rightarrow BM = \frac{10}{3} \quad (0/25)$$

اما BM قطر دایره است؛ پس شعاع دایره برابر $r = \frac{BM}{2} = \frac{5}{3}$ است و در نتیجه مساحت آن برابر با $\pi r^2 = \pi \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \pi$ است. (۰/۲۵)

۲۰۰. اگر در لوزی ABCD، اندازه دو قطر را d و d' فرض کنیم، طبق فرض سؤال داریم:



$$a^2 = dd' \quad (*) \quad (0/25)$$

از طرفی مساحت مثلث قائم‌الزاویه OAB برابر است با:

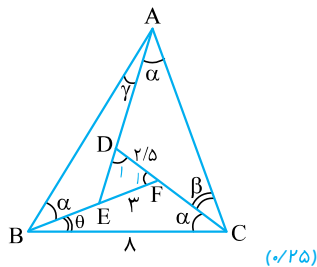
$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times \frac{d}{2} \times \frac{d'}{2} \quad (0/25) = \frac{1}{8} dd' \stackrel{(*)}{=} \frac{a^2}{8} \quad (0/25)$$

حال اگر ارتفاع وارد بر وتر در این مثلث را h در نظر بگیریم، داریم:

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} ha \quad (0/25) = \frac{a^2}{8} = \frac{1}{2} ha \Rightarrow h = \frac{1}{4} a \quad (0/25)$$

در نتیجه با توجه به اینکه طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ اندازه وتر است؛ پس مثلث OAB دارای زوایای 15° و 75° است. (۰/۲۵)

۲۰۱. با توجه به شکل، زاویه‌های D_1 و F_1 به ترتیب برای دو مثلث DAC و FBC خارجی محسوب می‌شوند؛ پس:

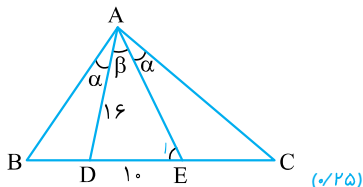


$$\begin{cases} \hat{D}_1 = \alpha + \beta = \hat{C} \quad (0/25) \\ \hat{F}_1 = \alpha + \theta = \hat{B} \quad (0/25) \end{cases} \xrightarrow{\text{ز.ز.}} \triangle EFD \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{FD}{BC} \quad (0/25) \Rightarrow \frac{3}{AB} = \frac{2/5}{8}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{24}{2/5} = 9/6 \quad (0/25)$$

۲۰۲. مثلث BAE در رأس B متساوی‌الساقین است؛ پس $\hat{E}_1 = \hat{BAE} = \alpha + \beta$ از طرفی $\hat{E}_1$ ، زاویه خارجی مثلث ABC در رأس E است؛ بنابراین:



$$\hat{E}_1 = \hat{EAC} + \hat{C} \quad (0/25) \Rightarrow \alpha + \beta = \alpha + \hat{C} \Rightarrow \hat{C} = \beta \quad (0/25)$$

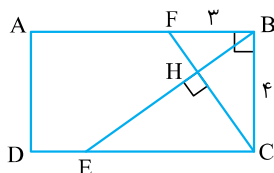
حال با توجه به برابری اندازه‌های دو زاویه از مثلث ADE با دو زاویه از مثلث CDA نظیر به نظیر تشابه زیر به دست می‌آید:

$$\triangle EAD \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{ED}{AD} \quad (0/25) \Rightarrow \frac{16}{10 + EC} = \frac{10}{16}$$

$$\Rightarrow 256 = 100 + 10 \cdot EC \Rightarrow EC = 15/6 \quad (0/25)$$

۲۰۳. با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث BFC اندازه FC را به دست می‌آوریم:

$$FC^2 = FB^2 + BC^2 \quad (0/25) = 3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow FC = 5 \quad (0/25)$$



با توجه به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه در مثلث BFC داریم:

$$\begin{cases} BF^2 = FH \times FC \quad (0/25) \Rightarrow 3^2 = FH \times 5 \Rightarrow FH = \frac{9}{5} \quad (0/25) \\ BH \times FC = BF \times BC \quad (0/25) \Rightarrow BH \times 5 = 3 \times 4 \Rightarrow BH = \frac{12}{5} \quad (0/25) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2FH = 2BH = 2\left(\frac{9}{5}\right) + 2\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{18}{5} + \frac{24}{5} = \frac{42}{5} = 10/8 \quad (0/25)$$