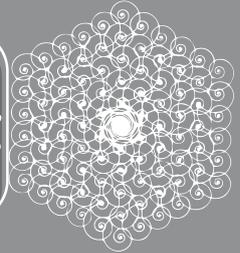




فصل ۱ آشنایی با مبانی ریاضیات



$\pi = 3,14$

ریزشیم (سؤال‌های خطبه‌خط)

24364

درس ۱: آشنایی با منطق ریاضی

۱. از بین جمله‌های زیر گزاره‌ها را مشخص کرده و ارزش هر یک از آن‌ها را در صورت امکان تعیین کنید.
الف) در پرتاب یک تاس احتمال آنکه عدد غیر اول بیاید، برابر $\frac{1}{6}$ است.

ب) چه هوای دلپذیری!

پ) عدد $4^5 + 3$ عددی مرکب است.

ت) هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت.

ث) لطفاً از سالن خارج شوید.

ج) در معادله درجه دوم که مجموع ضرایب برابر صفر است، همواره دو ریشه حقیقی متمایز وجود دارد.

چ) $\sqrt{229} - 14 \in \mathbb{Z}$

ح) چه کسی مسئول این پروژه است؟

خ) جدول ارزش‌های n گزاره، n^2 حالت دارد.

۲. در جاهای خالی، عدد یا علامت مناسب را طوری قرار دهید که ارزش گزاره‌ها به ترتیب یکی‌درمیان درست و نادرست باشد.

الف) $5^3 + \square = 14^2$

ب) $\frac{12 \times 17}{2} \square 10^3$

پ) $4 \square \{2, 4, 5\}$

ت) $11^3 \square \mathbb{P}$

ث) $\square \times 1/2 = 21/6$

۳. تعدادی گزاره‌ها همراه دامنه متغیرشان و تعدادی مجموعه جواب نوشته شده است. مجموعه جواب مربوط به هر گزاره‌ها را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۱۳ است. ($D = \mathbb{Z}$) $S = \{1, 4\}$

ب) در پرتاب یک تاس، $P(x) = \frac{1}{6}$ است. ($D = \{1, 2, \dots, 6\}$) $S = \{1, \frac{7}{11}\}$

پ) $(D = \mathbb{R}) \quad 1x^2 - 18x + 7 = 0$ $S = \{3, 8, \dots\}$

ت) x از اعداد مربع کامل، ۱ واحد کمتر است. ($D = \mathbb{N}$) $S = \{0, \pm 13, \pm 26, \dots\}$

ث) $(D = \mathbb{Z}) \quad \frac{3\sqrt{x}-1}{4} \leq 5$ $S = \{0, 1, 4, 9\}$

$S = \{2, 3, 4\}$

۴. ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کرده و نقیض هر کدام را بنویسید.

الف) $\cos 18^\circ = (-1)$

ب) توان سوم، ۱۱ برابر ۱۳۳۱ است یا π عددی گویا است.

پ) نظامی گنجوی نویسنده کتاب مخزن الاسرار است.

ت) $\sqrt{12} + 4 > \sqrt{27} + 3$

۵. جدول زیر را کامل کنید.

$p \wedge q$	$p \vee q$	q	p	q	p
		د		۷۹ عددی اول است.	سال کیبسه ۳۶۴ روز دارد.
				پاریس پایتخت فرانسه است.	$\frac{3}{8} < \frac{9}{20}$
				۷۲۴ مضرب ۶ است.	۵۱۲ و ۱۷۳۰ هر دو مکعب کامل هستند.

۶. با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، نشان دهید گزاره‌های $(p \vee q) \sim (\sim p \wedge \sim q)$ و $(p \wedge q) \sim (\sim p \vee \sim q)$ دوبه‌دو هم‌ارزند. (مشابه کتاب درسی)

۷. جدول ارزش زیر را پر کنید.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow (p \vee q)$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$

(مشابه کتاب درسی)

۸. قوانین زیر را با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها ثابت کنید.

- الف) قوانین جابه‌جایی
- ب) قوانین شرکت‌پذیری
- پ) قوانین توزیع‌پذیری

۹. نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

- الف) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای واقع بر عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، آن است که فاصله آن نقطه تا دو سر پاره‌خط، برابر باشد.
- ب) اگر a عددی صحیح و a^2 عددی فرد باشد، آنگاه a عددی فرد است.
- پ) ۱ عددی اول نیست اگر و تنها اگر ۸ عددی مربع کامل باشد.
- ت) اگر مجموع دو عدد زوج، فرد شود، آنگاه (-7) از (-8) کوچک‌تر است.
- ث) اگر n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آنگاه n مضرب ۳ است.

(مشابه کتاب درسی)

۱۰. با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، موارد زیر را اثبات کنید.

- الف) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
- ب) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$
- پ) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

۱۱. جدول ارزش زیر را کامل کنید.

p	q	$\sim p \wedge q$	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$	$(p \wedge q) \vee \sim q$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow \sim p)$
د	ن				
ن		ن			

۱۲. عکس نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید و آن‌ها را تا حد امکان ساده کنید.

- الف) $(\sim q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$
- ب) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (p \vee q)$

۱۳. اگر p و r گزاره‌هایی درست و q گزاره‌ای نادرست باشد، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

- الف) $(p \wedge (q \vee r)) \wedge \sim q$
- ب) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r)$
- پ) $(p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (p \wedge (q \vee \sim r)) \wedge \sim q$

۱۴. کدامیک از گزاره‌های زیر با یکدیگر هم‌ارزند؟

- الف) $(q \Rightarrow p) \wedge q$
- ب) $(q \Rightarrow (q \wedge p)) \wedge (p \vee \sim q)$
- پ) $(q \wedge (p \vee \sim q)) \Rightarrow p$
- ت) $\sim(\sim q \vee (q \Rightarrow p))$

۱۵. اگر p و q گزاره‌هایی دلخواه باشند، گزاره زیر را ساده کنید.

$$[(p \vee (q \Rightarrow p)) \wedge q] \vee \sim p$$



(مشابه کتاب درسی)

۴۳. درستی هر یک از روابط زیر را بررسی کنید.

الف) $(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$

ب) $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$

پ) $[(A \cup B) = (A \cup C) \wedge (A \cap B) = (A \cap C)] \Rightarrow B = C$

ت) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

۴۴. اگر $A = \{a \in \mathbb{N} \mid 3^a < 1000, a > 2\}$ و $B = \{b \in \mathbb{W} \mid b^2 + 4b \leq 12\}$ باشند، اعضای مجموعه‌های $A \times B$ و $B \times A$ را بنویسید.

(مشابه کتاب درسی)

۴۵. اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

ب) $A \times B = B \times A \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$

۴۶. اگر $A = [-2, 4]$ و $B = [1, 2]$ باشند، نمودارهای مربوط به $A \times B$ و $B \times A$ را رسم کنید.

۴۷. اگر $A = \{x^2 - y^2, 4\}$ و $B = \{y - 3, 32\}$ باشند، مقادیر x و y را به دست آورید.

(مشابه کتاب درسی)

۴۸. اگر $A = \{5, x - 1, z\}$ و $B = \{y + 2, -6, 1\}$ با فرض $A \times B = B \times A$ بیشترین مقدار برای $x + y - z$ را به دست آورید.

۴۹. اگر $A = [-4, 1]$ و $B = [-1, 2]$ باشند، نمودار $A^2 - B^2$ را رسم کنید.

۵۰. الف) اگر $A = \{-1, 2\}$ و $B = \{2, 5\}$ باشند، اعضای مجموعه $(A \times B) - A^2$ را نوشته و نمودار مربوط به آن را رسم کنید.

ب) اگر $A = [-3, 2]$ و $B = (-\infty, -2)$ باشند، نمودار مربوط به حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ را رسم کنید.



به بی‌شمار آزمون
مربوط به همین بخش
دسترسی پیدا کنید.

• جبر مجموعه‌ها



به بی‌شمار آزمون
مربوط به همین بخش
دسترسی پیدا کنید.

• آشنایی با منطق ریاضی



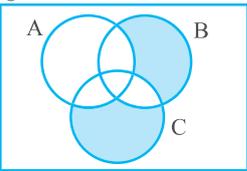
آزمون شبیه‌ساز ۱



رشته: ریاضی و فیزیک
تاریخ امتحان:

مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

سوالات امتحانی: آمار و احتمال - فصل ۱
نام و نام خانوادگی:

بارم	
۱	<p>۵۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر گزاره‌نمای شامل متغیر x با سور وجودی بیان شود، زمانی درست است که هیچ مثال نقضی نداشته باشد. ب) ترکیب دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که هر دو گزاره هم‌ارزش باشند. پ) تعداد زیرمجموعه‌های محض مجموعه π عضو A برابر $2^n - 2$ است. ت) اگر $A \times B = B \times A$ باشد، همواره $A = B$ است.</p> <p>درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p>
۲	<p>۵۲ با استفاده از جدول ارزش‌گذاری، درستی هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید. الف) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$ ب) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$</p>
۱	<p>۵۳ اگر $\sim q \Rightarrow p$ نادرست باشد، ارزش گزاره زیر را به دست آورید. $(p \Leftrightarrow q) \wedge (\sim q \Rightarrow (q \vee p))$</p>
۱	<p>۵۴ اگر p و q گزاره‌هایی دلخواه باشند، هم‌ارز گزاره زیر را بنویسید. $\sim p \vee [(p \vee (q \Rightarrow \sim p)) \wedge q]$</p>
۱	<p>۵۵ ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آنگاه n نیز مضرب ۳ است.</p>
۱	<p>۵۶ اگر $A = \{x \in \mathbb{W} \mid x < 7\}$ باشد، ارزش گزاره سوری زیر را تعیین کنید. $\exists x \in A; x^2 - 8x + 7 = 0$</p>
۱/۵	<p>۵۷ نقیض گزاره سوری زیر را بنویسید. $(\exists x \in \mathbb{R}, x - [x] \geq 0) \wedge (\forall x \in \mathbb{N}; \frac{x}{4} - \sqrt{x} < 0)$</p>
۱	<p>۵۸ اگر $A = \{\{\{a\}, a\}, \{a, a, \{a\}\}\} \in A$ باشد، درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید. الف) $\{\} \in A$ ب) $\{a, \{a\}\} \in A$ پ) $\{a\} \not\subseteq A$ ت) $\{\{a\}\} \notin A$</p> <p>درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p>
۱/۲۵	<p>۵۹ اگر ۳ عضو جدید به مجموعه A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۴۸ واحد افزایش می‌یابد. مجموعه A چند زیرمجموعه سره ناتهی دارد؟</p>
۱	<p>۶۰ اگر مجموعه‌های $\{a^2 - 8, 7 - 2a\}$ و $\{2b - 1\}$ برابر باشند، مقادیر ممکن برای a و b را به دست آورید.</p>
۱/۷۵	<p>۶۱ موارد زیر را اثبات کنید. الف) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ ب) $(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$</p>
۲	<p>۶۲ با استفاده از جبر مجموعه‌ها، مجموعه زیر را تا حد امکان ساده کنید. $(((A' \cup B) - A) \cup (A \cap B)) \cap B'$</p>
۱/۵	<p>۶۳ قسمت رنگی نمودار زیر مربوط به کدام مجموعه است؟ (رسم نمودارهای هر مرحله دارای نمره است.) الف) $[(B - C) \cup (A \cap B)] - A$ ب) $[(C - A) \cup (B - A)] - (B \cap C)$ پ) $[C - (A \cap B)] \cup B$ ت) $[(B \cup C) - A] - (A \cap B \cap C)$</p> 
۱/۵	<p>۶۴ اگر $A = \{1, 3\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 1\}$ باشند، اعضای مجموعه $B^2 - A^2$ را بنویسید.</p>
۱/۵	<p>۶۵ اگر $A = [-1, 3]$ و $B = [1, 5]$ باشند، نمودار $B \times A$ را رسم کرده و مساحت شکل حاصل را محاسبه کنید.</p>
۲۰	<p>جمع نمره «شاد و تندرست باشید.»</p>

آزمون شبیه‌ساز ۱

فینال



۸۱. اگر $p \Leftrightarrow q$ درست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره زیر را به دست آورید. (۱/۷۵)

$$(p \Rightarrow \sim q) \wedge (r \Rightarrow (p \wedge r))$$

۸۲. اگر ارزش گزاره‌های p و q یکسان و ارزش گزاره r درست باشد، جدول زیر را تکمیل کنید. (۱)

p	q	r	$(p \Rightarrow q) \vee r$	$r \vee (\sim p \wedge q)$	$(\sim q \Rightarrow p) \wedge r$	$(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow \sim q$

۸۳. از بین گزاره‌های زیر، کدام‌یک از گزاره‌ها با یکدیگر هم‌ارزند؟ (۱/۲۵)

الف) $(p \Rightarrow (p \wedge q)) \wedge (q \vee \sim p)$

ب) $(p \Rightarrow q) \wedge p$

پ) $p \Rightarrow q$

ت) $\sim p \vee (\sim q \Rightarrow \sim p)$

۸۴. گزاره هم‌ارز با ترکیب عطفی دو گزاره زیر را بنویسید. (۱/۷۵)

الف) $(\sim p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \vee p)$

ب) $(q \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \wedge (q \Rightarrow \sim p)$

۸۵. اگر عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ درست باشد، ارزش گزاره زیر را مشخص کنید. (۲/۲۵)

$$[(\sim p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge \sim q) \Rightarrow (q \vee p))] \wedge \sim p$$

۸۶. نقیض گزاره «همه دانشجویانی که برنامه‌نویسی بلد نیستند، علاقه‌مند به یادگیری آن هستند» را بنویسید. (۰/۲۵)

۸۷. عکس و عکس نقیض گزاره سوری زیر را بنویسید. (۰/۵)

$$\forall x, y, k \in \mathbb{Z} ; x + y = 2k + 1 \Rightarrow xy = 2k$$

۸۸. اگر $A = \{\{1\}, 2, \{1, 2, 3\}\}$ و $B = \{2, \{1, 3\}\}$ و $C = \{\{1, 2, 3\}, \{\{2\}\}, \{2, 3\}, 3\}$ باشند، اعضای مجموعه‌های $A - B$ و $B \cap C$ و $A \cup B$ را بنویسید. (۰/۷۵)

۸۹. مجموعه B دارای ۱۰۲۴ زیرمجموعه و اشتراک مجموعه‌های A و B دارای ۴ عضو است. مجموعه $(B \cap A')$ چند زیرمجموعه دارد؟ (۰/۷۵)

۹۰. اعضای مجموعه‌های A ، B و C را طوری بنویسید که همه روابط زیر هم‌زمان برقرار باشند. (۰/۷۵)

$$B \subseteq A, |A - C| > |B - C|, |B \cup C| > |B|, B \cap C \neq \emptyset$$

۹۱. درستی یا نادرستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید. (۱/۷۵)

الف) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

ب) $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$

پ) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

۹۲. اشتراک متمم مجموعه $((C' \cup A) - C) \cup (A - C) \cup (A' - C)$ را با مجموعه A' به کمک قوانین جبری به دست آورید و روی نمودار ون نشان دهید. (۲)

۹۳. اگر A ، B و C سه مجموعه باشند، معادل مجموعه زیر را به دست آورید. (۱/۷۵)

$$[(A - B) - C'] \cup [(A - C') \cup C] \cap B' \cup B$$

۹۴. اگر $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 4x + 1 < 47\}$ و $A \cap B = \{5, 9, 10\}$ باشند و مجموعه $(B - A) \times A$ دارای ۴۸ عضو باشد، مجموعه $(A \cap B') \times B$ دارای چند زیرمجموعه است؟ (۱/۵)

۹۵. اگر $A = (-4, 2)$ و $B = [1, 3]$ باشند، نمودار $A^2 - A \times B$ را رسم کنید. (۰/۷۵)



درس‌های آشنایی با منطق ریاضی

گزاره

به هر جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست باشد، گزاره گفته می‌شود. حتی اگر درستی یا نادرستی آن بر ما معلوم نباشد. هر گزاره فقط یک ارزش دارد یعنی نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد. جملات پرسشی، امری و عاطفی گزاره محسوب نمی‌شوند. زیرا خبری را بیان نمی‌کنند.

بلد بودم **بلد نبودم**

جدول ارزش گزاره‌ها

p
د
ن

هر گزاره مانند p دارای ارزش درست یا نادرست است. پس دو حالت دارد. بنابراین جدول ارزش n گزاره، دارای 2^n حالت (سطر) است. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم.

بلد بودم **بلد نبودم**

گزاره‌نما

به هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر، به یک گزاره تبدیل می‌شود، گزاره‌نما گفته می‌شود. گزاره‌نماها برحسب تعداد متغیرهای به کاررفته در آن‌ها، یک‌متغیره، دو‌متغیره یا ... نامیده می‌شوند.

بلد بودم **بلد نبودم**

دامنه متغیر گزاره‌نما

در هر گزاره‌نما، به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن گزاره‌نما قرار داد تا گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما گفته می‌شود و با D نشان داده می‌شود.

بلد بودم **بلد نبودم**

مجموعه جواب گزاره‌نما

در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آن‌ها گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای درست می‌شود، مجموعه جواب گزاره‌نما گفته می‌شود و با S نشان داده می‌شود. همواره $S \subseteq D$ است.

بلد بودم **بلد نبودم**

نقیض گزاره

نقیض گزاره p به صورت « $\sim p$ » نوشته می‌شود و به صورت «چنین نیست که p» خوانده می‌شود. اگر ارزش گزاره p درست باشد، ارزش گزاره « $\sim p$ » نادرست است و بالعکس. به علامت « \sim » ناقض گفته می‌شود.

بلد بودم **بلد نبودم**

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

گزاره‌های هم‌ارز

اگر دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند، به صورت « $p \equiv q$ » نوشته می‌شوند و به صورت «p هم‌ارز با q است» خوانده می‌شوند.

بلد بودم **بلد نبودم**

ترکیب فصلی دو گزاره

ترکیب فصلی گزاره‌های p و q به صورت « $p \vee q$ » نوشته می‌شود و به صورت «p یا q» خوانده می‌شود. به رابط منطقی « \vee »، فاصل گفته می‌شود.

بلد بودم **بلد نبودم**

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ زمانی نادرست است که هر دو گزاره p و q نادرست باشند. در بقیه حالات، ارزش این گزاره مرکب درست است.

بلد بودم **بلد نبودم**



ترکیب عطفی دو گزاره

ترکیب عطفی گزاره‌های p و q به صورت « $p \wedge q$ » نوشته می‌شود و به صورت « p و q » خوانده می‌شود. به رابط منطقی « \wedge »، عاطف گفته می‌شود.

ارزش گزاره مرکب $p \wedge q$ زمانی درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند. در بقیه حالات، ارزش این گزاره مرکب نادرست است.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

بلد بودم **بلد نبودم**

ترکیب شرطی دو گزاره

ترکیب شرطی دو گزاره p و q به صورت « $p \Rightarrow q$ » نوشته می‌شود و به صورت «اگر p آنگاه q » یا « p شرط کافی برای q است» یا « q شرط لازم برای p است» خوانده می‌شود. در این ترکیب شرطی به p مقدم (فرض) و به q تالی (حکم) گفته می‌شود. ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد. در بقیه حالات، ارزش این گزاره مرکب درست است.

اگر در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، p نادرست باشد، این گزاره همواره درست است و به ارزش q بستگی ندارد. در این حالت می‌توان گفت ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ به انتفای مقدم درست است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	د	د

بلد بودم **بلد نبودم**

با توجه به جدول ارزش گزاره‌های بالا می‌توان نتیجه گرفت گزاره‌های « $p \Rightarrow q$ » و « $\sim p \vee q$ » هم‌ارز منطقی‌اند.

بلد بودم **بلد نبودم**

عکس و عکس نقیض ترکیب شرطی

عکس ترکیب شرطی گزاره « $p \Rightarrow q$ » به صورت « $q \Rightarrow p$ » و عکس نقیض آن به صورت « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » است. هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د	د	د

دو گزاره هم‌ارز هستند

بلد بودم **بلد نبودم**

هم‌ارز بودن یک گزاره شرطی با عکس نقیض آن را می‌توان با استدلال استنتاجی به صورت زیر نشان داد.

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$\sim q \Rightarrow \sim p \equiv (\sim q) \vee \sim p \equiv q \vee \sim p \equiv \sim p \vee q$$

بلد بودم **بلد نبودم**



پاسخنامہ تشریحی



۱. الف: گزاره - درست: احتمال آمدن اعداد $\{1, 4, 6\}$ در پرتاب یک تاس برابر $\frac{1}{4}$ است. ب: جملات عاطفی گزاره محسوب نمی‌شوند. پ: گزاره - درست:

ت: $4^5 + 3 = 1027 = 13 \times 79$ / گزاره - دارای ارزش نامشخص / جملات امری گزاره محسوب نمی‌شوند. ج: گزاره - نادرست: اگر مجموع ضرایب معادله درجه دوم برابر صفر باشد، معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز یا یک ریشه حقیقی مضاعف است. / گزاره - درست: $13 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 14 - 27 = -13 \Rightarrow \sqrt{229} - 14 = 27 - 14 = 13 \in \mathbb{Z}$ / جملات پرسشی گزاره محسوب نمی‌شوند. / گزاره - نادرست: جدول ارزش‌های n گزاره، 2^n حالت دارد.

۲. الف: درست $5^3 + \sqrt{71} = 142$

ب: نادرست $\frac{12 \times 17}{2} \geq 103$

پ: درست $4 \in \{2, 4, 5\}$

ت: نادرست $113 \notin \mathbb{P}$

ث: درست $\sqrt{18} \times 1/2 = 21/6$

۳. الف: x مضرب ۱۳ است. $(D = \mathbb{Z})$ $S = \{0, \pm 13, \pm 26, \dots\}$

ب: در پرتاب یک تاس $P(x) = \frac{1}{6}$ است. $(D = \{1, 2, \dots, 6\})$ $S = \{1, 4\}$

پ: $S = \{1, \frac{7}{11}\}$ $(D = \mathbb{R})$ $11x^2 - 18x + 7 = 0$

ت: x از اعداد مربع کامل ۱ واحد کمتر است. $(D = \mathbb{N})$ $S = \{3, 8, \dots\}$

ث: $S = \{0, 1, 4, 9\}$ $(D = \mathbb{Z})$ $\frac{3\sqrt{x}-1}{2} \leq 5$

۴. الف: درست: $\cos(18^\circ) \neq -1$ / ب: درست: توان سوم ۱۱، برابر ۱۳۳۱ نیست و π عددی گویا نیست. / پ: درست: نظامی گنجوی نویسنده کتاب مخزن الاسرار نیست. / ت: نادرست: $\sqrt{12} + 4 \leq \sqrt{27} + 3$

۵.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
سال کبیسه ۳۶۴ روز دارد.	۷۹ عددی اول است.	د	د
$\frac{3}{8} < \frac{9}{20}$	پاریس پایتخت فرانسه است.	د	د
۵۱۲ و ۱۷۳۰ هر دو مکعب کامل هستند.	۷۲۴ مضرب ۶ است.	د	د

۶.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

پس گزاره‌های $\sim(p \vee q)$ و $(\sim p \wedge \sim q)$ هم‌ارزند.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

پس گزاره‌های $\sim(p \wedge q)$ و $(\sim p \vee \sim q)$ هم‌ارزند.

۷.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
د	د	د	د	د	د
د	ن	د	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د	ن
ن	ن	ن	ن	د	د

$\sim q \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow (p \vee q)$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د
ن	د	د	ن
د	د	د	ن
د	د	د	د

از جدول فوق می‌توان دریافت که گزاره‌های $(p \Rightarrow p \vee q)$ و $(p \wedge q \Rightarrow p)$ همواره درست هستند.

۸. الف:

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
د	د	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

ب:

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

p	q	$\sim p \wedge q$	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$	$(p \wedge q) \vee \sim q$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow \sim p)$
د	ن	ن	ن	د	د
ن	ن	ن	د	د	د

۱۲. عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $\sim q \Rightarrow \sim p$ است. عکس

نقیض گزاره‌های داده شده به صورت زیر است:

$$\sim (r \Rightarrow q) \Rightarrow \sim (\sim q \vee r) \equiv \sim (\sim (r \Rightarrow q)) \vee \sim (\sim q \vee r)$$

الف:

$$\equiv (r \Rightarrow q) \vee (q \wedge \sim r) \equiv (\sim r \vee q) \vee (q \wedge \sim r)$$

$$\equiv (\sim r \vee q \vee q) \wedge (\sim r \vee q \vee \sim r)$$

$$\equiv (\sim r \vee q) \wedge (\sim r \vee q) \equiv \sim r \vee q$$

$$\sim (p \vee q) \Rightarrow \sim (p \wedge \sim q) \equiv \sim (\sim (p \vee q)) \vee \sim (p \wedge \sim q)$$

ب:

$$\equiv (p \vee q) \vee (\sim p \vee q) \equiv q \vee (p \vee \sim p) \equiv q \vee T \equiv T$$

$$p \equiv r \equiv T, q \equiv F$$

۱۳

$$(p \wedge (q \vee r)) \wedge \sim q \equiv (T \wedge (F \vee T)) \wedge T$$

الف:

$$\equiv (T \wedge T) \wedge T \equiv T \wedge T \equiv T$$

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r)$$

ب:

$$\equiv (T \Rightarrow F) \Rightarrow (T \vee T) \equiv F \Rightarrow T \equiv T$$

$$(p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (p \wedge (q \vee \sim r)) \wedge \sim q$$

پ:

$$\equiv (T \Rightarrow T) \Leftrightarrow (T \wedge (F \vee F)) \wedge T \equiv T \Leftrightarrow ((T \wedge F) \wedge T)$$

$$\equiv T \Leftrightarrow (F \wedge T) \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$$

$$(q \Rightarrow p) \wedge q \equiv (\sim q \vee p) \wedge q \equiv (\sim q \wedge q) \vee (p \wedge q)$$

۱۴ الف:

$$\equiv F \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$$

$$(q \Rightarrow (q \wedge p)) \wedge (p \vee \sim q) \equiv (\sim q \vee (q \wedge p)) \wedge (p \vee \sim q)$$

ب:

$$\equiv ((\sim q \vee q) \wedge (\sim q \vee p)) \wedge (p \vee \sim q)$$

$$\equiv (T \wedge (\sim q \vee p)) \wedge (p \vee \sim q) \equiv (\sim q \vee p) \wedge (p \vee \sim q)$$

$$\equiv p \vee \sim q$$

$$(q \wedge (p \vee \sim q)) \Rightarrow p \equiv (q \wedge (p \vee \sim q)) \vee p$$

پ:

$$\equiv (\sim q \vee \sim (p \vee \sim q)) \vee p \equiv (\sim q \vee (\sim p \wedge q)) \vee p$$

$$\equiv ((\sim q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee q)) \vee p \equiv ((\sim q \vee \sim p) \wedge T) \vee p$$

$$\equiv (\sim q \vee \sim p) \vee p \equiv \sim q \vee (\sim p \vee p) \equiv \sim q \vee T \equiv T$$

$$\sim (\sim q \vee (q \Rightarrow p)) \equiv \sim (\sim q \vee (\sim q \vee p)) \equiv \sim (\sim q \vee p) \equiv q \wedge \sim p$$

هیچیک از گزاره‌ها هم‌ارز نیستند.

$$[(p \vee (q \Rightarrow p)) \wedge q] \vee \sim p \equiv [(p \vee (\sim q \vee p)) \wedge q] \vee \sim p$$

۱۵

$$\equiv [(p \vee \sim q) \wedge q] \vee \sim p \equiv [(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge q)] \vee \sim p$$

$$\equiv [(p \wedge q) \vee F] \vee \sim p \equiv (p \wedge q) \vee \sim p$$

$$\equiv (p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim p) \equiv T \wedge (q \vee \sim p) \equiv q \vee \sim p$$

$$[2] = 2 \quad \text{الف: نادرست؛ } x = 2 \text{ مثال نقض این گزاره است.}$$

$$1 - 2 = -1 < 0 \quad \text{ب: درست؛ به ازای } x = 1 \text{ این گزاره درست است.}$$

$$\text{پ: نادرست؛ } x = 9 \text{ مثال نقض این گزاره است.}$$

$$k = 4 \Rightarrow x = 2 \times 4 + 1 = 9 \notin \mathbb{P}$$

$$\text{ت: نادرست؛ } x = \frac{\pi}{4} = 90^\circ \text{ مثال نقض این گزاره است.}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan(90^\circ) = \text{تعریف نشده}$$

$$\cot(90^\circ) = 0$$

$$\text{ث: نادرست؛ } x = 5 \text{ مثال نقض این گزاره است. عدد } 1 + 2^5 \text{ بر } 3 \text{ بخش پذیر است.}$$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

وبه همین ترتیب می‌توان جدول مربوط به هم‌ارزی $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ را رسم کرد.

۹. نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $(p \wedge \sim q)$ و نقیض گزاره دوشروطی $(p \Leftrightarrow q)$ به صورت زیر است:

$$(\sim p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

الف: شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط باشد، آن است که فاصله آن نقطه تا دو سر پاره‌خط، برابر نباشد. / ب: a عددی صحیح و a^2 عددی فرد است و اما a عددی فرد نیست. / پ: 1 عددی اول است اگر و تنها اگر 8 عددی مربع کامل باشد. / ت: مجموع دو عدد زوج، فرد است و (اما) (-7) از (-8) کوچک‌تر نیست. / ث: n عددی صحیح و n^2 مضرب 3 است و (اما) n مضرب 3 نیست.

۱۰ الف:

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

ب:

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	د	ن	د	د
ن	د	ن	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	ن	د	ن	د	د

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

پ:

p	q	$\sim p$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Leftrightarrow q)$	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	ن	د	د
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	ن

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow q$$

۴۱. قانون جذب به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= A, \quad A \cap (A \cup B) = A \\ A \cap [(A \cup (A \cap B'))' \cup ((A \cup B) - B)] & \\ &= A \cap [A' \cup ((A \cup B) \cap B')] = A \cap [A' \cup ((A \cap B') \cup (B \cap B'))] \\ &= A \cap [A' \cup (A \cap B')] = A \cap [(A' \cup A) \cap (A' \cup B')] \\ &= A \cap [U \cap (A' \cup B')] = A \cap (A' \cup B') = (A \cap A') \cup (A \cap B') \\ &= \emptyset \cup (A \cap B') = A \cap B' = A - B \end{aligned}$$

۴۲. الف:

$$\begin{aligned} (B - A) \cup [(A' \cap B) \cap ((A - B) \cup B')] & \\ = (B \cap A') \cup [(A' \cap B) \cap ((A \cap B') \cup B')] & \\ = (B \cap A') \cup [A' \cap (B \cap B')] = (B \cap A') \cup \emptyset = B \cap A' & \\ = B - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} & \end{aligned}$$

ب:

$$\begin{aligned} (A \cap B') \cup (A \cap B) &= A \cap (B' \cup B) = A \cap U \\ &= A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \end{aligned}$$

۴۳. الف: $(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow (A \cup A') \subseteq X \Rightarrow U \subseteq X$

از طرفی همواره $X \subseteq U$ است، در نتیجه $X = U$ است.

ب: $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = (A \cup B) \cap (A \cup B)' = \emptyset$

پ: $B = B \cap (A \cup B) \xrightarrow{A \cup B = A \cup C} B \cap (A \cup C)$

$$= (B \cap A) \cup (B \cap C) \xrightarrow{A \cap B = A \cap C} (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$= C \cap (A \cup B) \xrightarrow{A \cup B = A \cup C} C \cap (A \cup C) = C \Rightarrow B = C$$

ت: $(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$

$$= (A \cup B) \cap (A' \cup B') = [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B']$$

$$= [(A \cap A') \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup (B \cap B')]$$

$$= (B \cap A') \cup (A \cap B') = (B - A) \cup (A - B)$$

۴۴. الف: $A = \{a \in \mathbb{N} \mid 3^a < 1000, a > 2\} \Rightarrow A = \{3, 4, 5, 6\}$

$B = \{b \in \mathbb{W} \mid b^2 + 4b \leq 12\} \Rightarrow B = \{0, 1, 2\}$

$$A \times B = \{(3, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (5, 0), (5, 1), (5, 2), (6, 0), (6, 1), (6, 2)\}$$

$$B \times A = \{(0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$$

۴۵. الف: از روش برهان خلف استفاده می‌کنیم؛ فرض می‌کنیم $A \times \emptyset \neq \emptyset$

باشد در این صورت حداقل یک عضو مانند (x, y) در $A \times \emptyset$ وجود دارد که به ازای آن، x عضو A و y عضو \emptyset باشد که غیرقابل قبول است، زیرا مجموعه \emptyset فاقد عضو است.

$$(x, y) \in A \times \emptyset \Rightarrow x \in A \wedge y \in \emptyset$$

پس $y \in \emptyset$ و فرض خلف نادرست و حکم برقرار است.

به همین ترتیب ثابت می‌شود که $\emptyset \times A = \emptyset$ است و در نهایت حکم اصلی برقرار است.

ب: اگر $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$ باشد که با توجه به اثبات «الف» حکم برقرار است، پس فقط باید حالت $A = B$ را بررسی کنیم:

$$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \Rightarrow \exists x; x \in A \wedge \exists y \in B$$

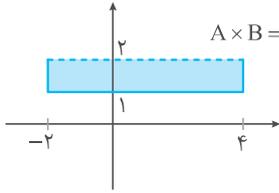
$$\xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} \exists (x, y); (x, y) \in A \times B$$

$$\xrightarrow{A \times B = B \times A} (x, y) \in B \times A$$

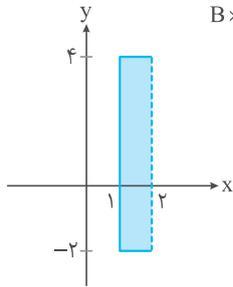
$$\xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x \in B \wedge y \in A \Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$$

۴۶. $A = [-2, 4], B = [1, 2]$

$$A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 4, 1 \leq y < 2\}$$



$$B \times A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x < 2, -2 \leq y \leq 4\}$$



۴۷. $A = \{x^2 - y^2, 4\}, B = \{y - 3, 3, 2\}$ و $A \times B = B \times A$ است، پس

مجموعه‌های A و B برابرند.

$$y - 3 = 4 \Rightarrow y = 7$$

$$x^2 - y^2 = 32 \Rightarrow x^2 - 49 = 32 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm 9$$

بنابراین برای x مقادیر ۹ و -۹ و برای y مقدار ۷ قابل قبول است.

۴۸. $A = B$ در نتیجه $A \times B = B \times A$ و $B = \{y + 2, -6, 1\}$ و $A = \{5, x - 1, z\}$

$$y + 2 = 5 \Rightarrow y = 3$$

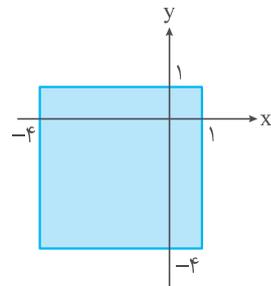
(I) $x - 1 = -6, z = 1: x = -5 \Rightarrow x + y - z = -5 + 3 - 1 = -3$

(II) $x - 1 = 1, z = -6: x = 2 \Rightarrow x + y - z = 2 + 3 - (-6) = 11$ ✓

بیشترین مقدار $x + y - z$ برابر ۱۱ است.

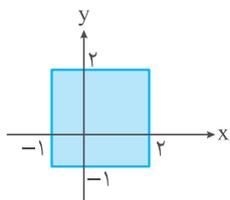
۴۹. $A = [-4, 1]$

$$A^2 = A \times A = [-4, 1] \times [-4, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -4 \leq x \leq 1, -4 \leq y \leq 1\}$$

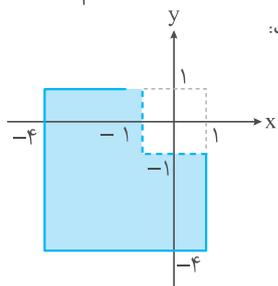


$B = [-1, 2]$

$$B^2 = B \times B = [-1, 2] \times [-1, 2] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2\}$$



پس نمودار $A^2 - B^2$ به صورت مقابل است:



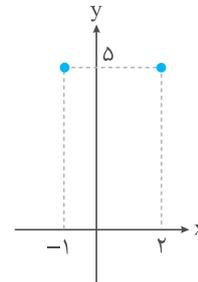
۵۰ الف:

$$A = \{-1, 2\}, B = \{2, 5\}$$

$$A \times B = \{(-1, 2), (-1, 5), (2, 2), (2, 5)\}$$

$$A^T = A \times A = \{(-1, -1), (-1, 2), (2, -1), (2, 2)\}$$

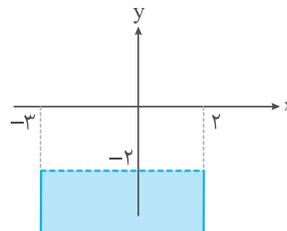
$$(A \times B) - A^T = \{(-1, 5), (2, 5)\}$$



ب:

$$A = [-3, 2], B = (-\infty, -2)$$

$$A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x \leq 2, y < -2\}$$



۵۱ الف: نادرست (۰/۲۵): گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی بیان می‌شود، زمانی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد. / درست (۰/۲۵) / پ: نادرست (۰/۲۵): تعداد زیرمجموعه‌های محض مجموعه \emptyset برابر $2^n - 1$ است. / ت: نادرست (۰/۲۵): اگر $A \times B = B \times A$ باشد یا $A = B$ یا $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$ است.

۵۲ الف:

p	q	$\sim p$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Leftrightarrow q)$	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	ن

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

دو ستون آخر نشان می‌دهد که هم‌ارزی برقرار است. (۰/۲۵)

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$$

ب:

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	ن	د	ن	د	د

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

دو ستون آخر نشان می‌دهد که هم‌ارزی برقرار است. (۰/۲۵)

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

۵۳ گزاره $\sim q \Rightarrow p$ نادرست است؛ پس گزاره « $\sim q$ » درست یعنی گزاره « q » نادرست و گزاره « p » نادرست است.

$$p \equiv q \equiv F \quad (۰/۲۵)$$

$$(p \Leftrightarrow q) \wedge (\sim q \Rightarrow (q \vee p)) \equiv (F \Leftrightarrow F) \wedge (T \Rightarrow (F \vee F))$$

$$T \wedge (T \Rightarrow F) \equiv T \wedge F \equiv F$$

$$\sim p \vee [(p \vee (q \Rightarrow \sim p)) \wedge q] \equiv \sim p \vee [(p \vee (\sim q \vee \sim p)) \wedge q] \quad (۰/۲۵)$$

$$\equiv \sim p \vee [((p \vee \sim p) \vee \sim q) \wedge q] \equiv \sim p \vee [(T \vee \sim q) \wedge q]$$

$$\equiv \sim p \vee (T \wedge q) \equiv \sim p \vee q \quad (۰/۲۵)$$

۵۴ به جای اثبات حکم داده‌شده، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم:

«هرگاه n عددی صحیح و n مضرب ۳ نباشد، آنگاه n^2 مضرب ۳ نیست.» (۰/۲۵) اگر عدد صحیح n مضرب ۳ نباشد، پس باقی‌مانده تقسیم آن بر ۳ برابر ۱ یا ۲ است.

$$n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 = (3k + 1)^2 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1$$

$$= 3(\underbrace{3k^2 + 2k}_q) + 1 = 3q + 1 \Rightarrow n^2 \text{ مضرب ۳ نیست.} \quad (۰/۲۵)$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 = (3k + 2)^2 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4$$

$$= 3(\underbrace{3k^2 + 4k + 1}_{q'}) + 1 = 3q' + 1 \Rightarrow n^2 \text{ مضرب ۳ نیست.} \quad (۰/۲۵)$$

پس در هر دو حالت، n^2 مضرب ۳ نیست و چون هر گزاره با عکس نقیض خود هم‌ارزش است، پس حکم اولیه نیز درست است. (۰/۲۵)

$$A = \{x \in \mathbb{W} \mid x < 7\} \Rightarrow A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (۰/۲۵)$$

۵۶

به‌ازای $x = 1$ معادله $x^2 - 8x + 7 = 0$ درست است، پس گزاره سوری داده‌شده درست است. (۰/۲۵)

$$(\exists x \in \mathbb{R}; x - [x] \geq 0) \wedge (\forall x \in \mathbb{N}; \frac{x}{2} - \sqrt{x} < 0) \quad (۰/۲۵)$$

نقیض گزاره سوری فوق به‌صورت زیر است:

$$(\forall x \in \mathbb{R}; x - [x] < 0) \vee (\exists x \in \mathbb{N}; \frac{x}{2} - \sqrt{x} \geq 0)$$

۵۸ اعضای مجموعه $A = \{\{\{a\}, a\}, a, \{\}, \{a\}, a, \{\{a\}\}\}$ عبارت‌اند از:

$\{\{a\}, a, \{\{a\}\}$ و $\{\{a\}, a, a\}$ یعنی مجموعه A عضو دارد. اگر $a \in A$

باشد، $\{a\} \subseteq A$ است و بالعکس. حال به بررسی موارد داده‌شده می‌پردازیم:

الف: درست (۰/۲۵) / ب: نادرست (۰/۲۵) / پ: نادرست (۰/۲۵) / ت: نادرست (۰/۲۵)

۵۹ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n است.

$$2^n + 448 = 2^{n+3} \quad (۰/۵)$$

$$2^{n+3} - 2^n = 448 \Rightarrow 2^n \times 2^3 - 2^n = 448 \Rightarrow 2^n (\lambda - 1) = 448$$

$$\Rightarrow 7 \times 2^n = 448 \Rightarrow 2^n = 64 \Rightarrow n = 6 \quad (۰/۵)$$

مجموعه A دارای $2^6 - 2 = 62$ زیرمجموعه سره و ناتهی است. (۰/۲۵)

۶۰ اگر دو مجموعه با هم برابر باشند، اعضای آن‌ها با هم برابرند.

$$\{a^2 - 8, 7 - 2a\} = \{2b - 1\}$$

مجموعه $\{2b - 1\}$ تک‌عضوی است، پس مجموعه $\{a^2 - 8, 7 - 2a\}$ هم باید

تک‌عضوی باشد، یعنی اعضای آن یکسان باشد.

$$a^2 - 8 = 7 - 2a \Rightarrow a^2 + 2a - 15 = 0 \Rightarrow (a - 3)(a + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \quad (۰/۲۵) \\ a = -5 \quad (۰/۲۵) \end{cases}$$

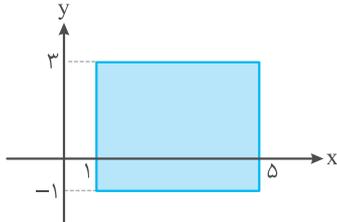
۶۴. $A = \{1, 3\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1\} \Rightarrow B = \{-1, 0, 1\}$ (✓۲۵)

$A^T = \{1, 3\} \times \{1, 3\} = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$ (✓۵)

$B^T = \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\} = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$ (✓۵)

$\Rightarrow B^T - A^T = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0)\}$ (✓۲۵)

۶۵. $B \times A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 5, -1 \leq y \leq 3\}$ (✓۵)



(✓۵)

$S = 4 \times 4 = 16$ (✓۵)

۶۶. الف: گزاره (✓۲۵) \neg ب: گزاره (✓۲۵) \neg پ: نادرست (✓۲۵) ت: $A = B$ (✓۲۵)

۶۷. الف: $S = \{1\}$ (✓۲۵) ب: $S = \{1, 2, 3, 4\}$ (✓۲۵) پ: $S = \{1, 5\}$ (✓۲۵) ت: $S = \{1, 2\}$ (✓۲۵)

۶۸. الف:

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Leftrightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

(✓۵)

ب:

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$(p \vee \sim q) \wedge q$
د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	د	د	ن

(✓۵)

پ:

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \vee p$	$(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \vee p)$
د	د	ن	ن	د	ن
د	ن	د	د	ن	ن
ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	د	د	د	د

(✓۵)

بنابراین به جای اولین علامت سؤال در سمت چپ، گزاره «پ» و به جای دومین علامت سؤال، گزاره «الف» قرار می‌گیرد. (✓۲۵)

۶۹. «اگر شخص A این پروژه را مدیریت کند، آنگاه این پروژه ۱۵ روز زودتر به پایان می‌رسد.»

$p \Rightarrow q$

$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ (✓۲۵)

بنابراین هم‌ارز گزاره فوق به صورت زیر است:

«شخص A این پروژه را مدیریت نمی‌کند یا این پروژه ۱۵ روز زودتر به پایان می‌رسد.» (✓۲۵)

پس مجموعه $\{a^2 - 8, 7 - 2a\}$ می‌تواند برابر $\{1\}$ یا $\{1, 7\}$ باشد.

(I) $a = 3 : 2b - 1 = 1 \Rightarrow b = 1$ (✓۲۵)

(II) $a = -5 : 2b - 1 = 17 \Rightarrow b = 9$ (✓۲۵)

بنابراین زوج مرتب (a, b) می‌تواند به صورت $(3, 1)$ یا $(-5, 9)$ باشد.

۶۱. الف: $A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C')$

$= (A \cap B') \cup (A \cap C') = (A - B) \cup (A - C)$

ب: $(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow (A \cup A') \subseteq X \Rightarrow U \subseteq X$

از طرفی همواره $X \subseteq U$ است، بنابراین می‌توان گفت $X = U$ است. (✓۲۵)

۶۲. $[(A' \cup B) - A] \cup (A \cap B) \cap B'$

$= [((A' \cup B) \cap A') \cup (A \cap B)] \cap B'$

$= [(A' \cap A') \cup (B \cap A') \cup (A \cap B)] \cap B'$ (✓۲۵)

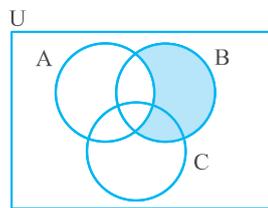
$= [(A' \cup (B \cap A')) \cup (A \cap B)] \cap B'$ (✓۲۵)

$= [A' \cup (A \cap B)] \cap B'$ (✓۲۵)

$= [U \cap (A' \cup A) \cap (A' \cup B)] \cap B'$ (✓۲۵)

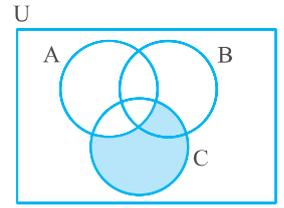
$= (A' \cup B) \cap B' = (A' \cap B') \cup (B \cap B') = A' \cap B'$ (✓۲۵)

۶۳. مجموعه «ب» (✓۲۵)



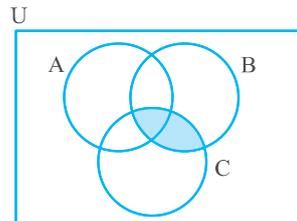
$B - A$

(✓۲۵)



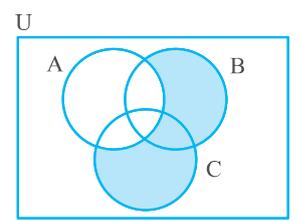
$C - A$

(✓۲۵)



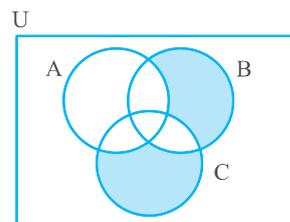
$B \cap C$

(✓۲۵)



$(C - A) \cup (B - A)$

(✓۲۵)



$[(C - A) \cup (B - A)] - (B \cap C)$

(✓۲۵)